现代数学丛书

多复变数的奇异积分

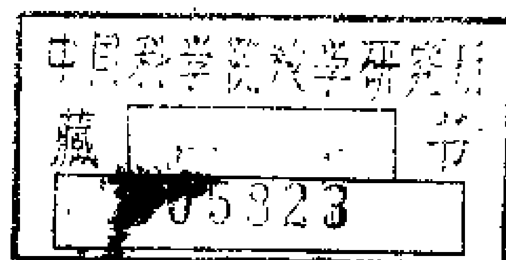
龚 昇 著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

多复变数的奇异积分

龚 昇 著



上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是现代数学丛书中的一种，汇集了作者从 1964 年起同他的合作者在这一领域中的科研成果，内容包括绪论，超球的 Cauchy 型积分，复超球面上的奇异积分方程，复超球面的 Hadamard 主值，Lie 球双曲空间的 Cauchy 型积分，矩阵双曲空间的 Cauchy 型积分，强拟凸域的 Henkin 型积分等七章。本书供高等学校数学系高年级学生、研究生及这方面的数学科研人员参考。

现代数学丛书

多复变数的奇异积分

龚 昇 著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 9　字数 218,000

1982 年 11 月第 1 版　1982 年 11 月第 1 次印刷

印数：1—12,800

统一书号：13119·1040　定价：(科五) 1.35 元

Singular Integral in Several Complex Variables

This monograph collects the works of the author and his colleagues in singular integrals of several complex variables since 1964. The kernels that give rise to such singular integrals on the boundaries of the domain are Cauchy–Fantappiè kernels and Szegö Kernels. A brief description of these kernels is given as a preliminary in the introdution of the book. In the first chapter, the author starts from the most important simply connected irreducible domain, i.e., the ball in C^n,and makes an extensive investigation on the integral of Cauchy type on the hypersphere. The author's conclusion shows that, quite different from the case of one complex variable, there are many ways to define the principle value of Cauchy integral, and accordingly, various forms of Plemelj formula are obtained. With these results as a tool, the author advances the theory of singular integral equations with constant coefficients and variable coefficients on the hypersphere in chapter two. This was something completely new at that time. In chapter three, the concept of Hadamard priciple value is extended to the space of several complex variables. They define the Hadamard priciple value of singular integral on hypersphere, in terms of which, the limiting values of the derivative of the Cauchy integral can then be expressed. The next two chapters deal with the Cauchy integral on two kinds of classical domains defined by prof.L.K. Hua. The author points out that the limiting value of the integral on the characteristic manifold is essentially different from that on the other parts of the boundary. Finally, in chapter six, the Cauchy integrals defined by Henkin–Ramirez kernel and Stein–Kerzman kernel of the strictly pseudo convex domains are studied, and generalized plemelj formula is obtained.

目 录

绪　　论

§0.1 引　　言

1964 年起，我与孙继广同志一起研究了多复变数的 Cauchy 型积分以及奇异积分方程. 十年浩劫，前后中断了十多年，1979 年起，我与史济怀同志一起重新开始继续研究多复变数的奇异积分这个课题. 多复变数的奇异积分是多复变数函数论中一个重要而活跃的分支，内容丰富*)，我无意在这本书中，对国内外的成果作全面的介绍与论述. 这本书的主要内容，只是我与我的合作者在这方面所做研究工作的一个阶段性小结.

Cauchy 型积分在复变数函数论中的重要性已毋庸多说，它不但有着函数论本身的重要意义，而且是奇异积分方程、边界值问题等学科中不可缺少的工具. 最基本最简单的不可约域之一是超球，所以本书从研究 $\mathbb{C}^n$ 中超球的 Cauchy 型积分开始. 有趣的是：与单复变数时不一样，在多复变数时，有多种的 Cauchy 主值，以及多种式样的 Plemelj 公式，这是第一章的内容.

众所周知，一维的奇异积分方程是以单复变数的 Cauchy 型积

---

*) 例如可参阅 Kerzman[1]，此文对多复变数的奇异积分的最近发展作了很好的介绍.

分作为主要工具的．第二章的内容是将第一章中所得到的有关 $\mathbb{C}^n$ 中超球的 Cauchy 型积分的结果，应用到高维奇异积分方程中去，建立了 $\mathbb{C}^n$ 中复超球面上的奇异积分方程理论．这项工作，在当时也许是首次将多复变数的 Cauchy 型积分作为工具来研究高维奇异积分方程，因为在以往高维奇异积分方程的研究中似乎均未用到多复变数的 Cauchy 型积分．

作为奇异积分的 Cauchy 主值的推广，Hadamard 考虑了高阶发散奇异积分的有限部分，并用此来解双曲型偏微分方程的 Cauchy 问题．Fox 将此想法推广到复平面．在第三章中，将 Hadamard 主值的概念推广到多复变数空间，研究了 $\mathbb{C}^n$ 中复超球面上的 Hadamard 主值，并用此来研究超球的 Cauchy 型积分的导数．

E. Cartan 证明了：在 $\mathbb{C}^n$ 中可递的不可约的有界对称域仅有六种可能性，其中四类为典型域，二类例外域．华罗庚在他的名著《多复变数函数论中的典型域的调和分析》一书中，对此作了十分深刻的研究．在这基础上，对典型域的 Cauchy 型积分进行研究是第四章及第五章的内容．在第四章中讨论了第四类典型域的 Cauchy 型积分，即Lie 球双曲空间的 Cauchy 型积分．在第五章中讨论了第一类典型域的 Cauchy 型积分，即矩阵双曲空间的 Cauchy 型积分．可以看出，这两章的工作是与前面几章相关联的．还可以看出，当点从区域内部趋于特征流形时，Cauchy 型积分的极限值只有一种表达形式，而趋于边界的其余部分时，其表达形式仍是多样的．

全纯域一定是拟凸域，而 Levi 猜想指出，拟凸域一定是全纯域，所以拟凸域在多复变数中成为十分重要的研究对象．在本书的最后一章中，对于强拟凸域的 Henkin-Ramirez 核及 Stein-Kerzman 核所定义的 Henkin-Ramirez 型积分及 Stein-Kerzman 型积分进行了研究，得到一些也许是有趣的结果．在第一章中所

提到的那种现象，即当点趋于边界时，相应的奇异积分的极限值的表达方式是多样的，在这里，这种现象依然发生．至于非强拟凸域，由于它与强拟凸域是有本质上的区别的，它的奇异积分还有待于进一步的探讨．在这一章的最后，对一般域上的 Bochner-Martinolli 型积分顺便进行了讨论，主要指出：这时候，上述现象，不再发生．

本书的内容取自龚昇[1]，[2]，龚昇、孙继广[1]，[2]，[3]，[4]，[5]，龚昇、史济怀[1]，[2]，[3]，[4]，[5]，孙继广[1]以及史济怀[1]．

多复变数函数的积分表示的核是很多的，同样多复变数的奇异积分也是很多的，但以上所讨论的也许是一些最主要的核所定义的奇异积分．

由于作者水平有限，写得也很匆忙，一定有不少不妥甚至错误之处，希望能得到读者的批评与指正．

§0.2 Cauchy-Szegö 核

在多复变数中，没有与单复变数完全相当的 Cauchy 核．人们从各种不同的观点来推广单复变数的 Cauchy 核到多复变数中去．

一种重要的观点是从 Hilbert 空间的观点来看待 Cauchy 核．

考虑 $\mathbb{C}$ 中单位圆 $|z|<1$，边界为 $w=e^{i\theta}$，则 Cauchy 核

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{dw}{w-z}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{d\theta}{1-ze^{-i\theta}}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}z^n e^{-in\theta}d\theta.$$

显然，$\left\{\frac{z^n}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 是 $|z|<1$ 中解析的函数类的完备正交系；而 $\left\{\frac{w^n}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ 是在 $|w|=1$ 上的连续函数的就范正交系．这样就可得到：在 $|z|\leqslant 1$ 上连续，在 $|z|<1$ 中解析的函数，可以用 Cauchy 积分表达之，即 Cauchy 核对这类函数有再生性质．在这

种观点下得到的核，称为 Cauchy-Szegö 核．当 $\mathbb{C}$ 中的区域不是单位圆时，所得的 Cauchy-Szegö 核就不再是 $\frac{1}{2\pi i}\frac{dw}{w-z}$.

因之，想把单复变数的 Cauchy-Szegö 核推广到多复变数空间 $\mathbb{C}^n$ 中的域 Ω 上去，只要找到 $\mathbb{C}^n$ 中的一组函数 $\{\varphi_\nu(z)\}(\nu=0,1,2,\cdots)$，$\{\varphi_\nu(z)\}$ 在 Ω 中，对 Ω 中的解析函数类而言，组成完备正交系，在 Ω 的边界 $b\Omega$ 上(或其中一部分，如特征流形上)，$\{\varphi_\nu(z)\}$ 是就范正交的，如果 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(w)}\,(z\in\Omega,\ w\in b\Omega)$ 一致收敛，则这就是所要的 Cauchy-Szegö 核．

华罗庚[1]证明了：若 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$，$\Omega$ 是圆型、有界、单连通域，包有原点，且对原点而言是星状的，Ω 的特征流形为 $\mathscr{L}$，且 $\mathscr{L}$ 也是圆型的、紧致的，那末 Ω 的 Cauchy-Szegö 核是存在的．他给出了 $\varphi_\nu(z)$ 的具体作法，这时，$\varphi_\nu(z)$ 均为 z 的齐次多项式，从而可以具体地作出 Cauchy-Szegö 核来．例如他给出了 $\mathbb{C}^n$ 中超球的 Cauchy-Szegö 核．

若 $z=(z_1,\cdots,z_n)$，$u=(u_1,\cdots,u_n)$，且 $z\bar{z}'<1$，$u\bar{u}'=1$，则 $z\bar{z}'<1$ 的 Cauchy-Szegö 核为

$$\omega_{2n-1}^{-1}(1-z\bar{u}')^{-n}\dot{u}, \tag{0.2.1}$$

这里 ω_{2n-1} 为 $u\bar{u}'=1$ 的体积，它等于 $\frac{2\pi^n}{\Gamma(n)}$，$\dot{u}$ 为 $u\bar{u}'=1$ 的体积元素．

超球的 Cauchy-Szegö 核是十分简洁的，但是对于这样一个重要的不可约域，正如 W. Rudin 在[1]中所指出的，直到 1958 年华罗庚的名著[1]出版之前，谁也没有写出这个核来．

不但如此，华罗庚在[1]中应用群表示论，具体给出了四类典型域的 Cauchy 核，详细请参阅他的原著．

对于前述华罗庚所讨论的圆型域，我们还证明了：凡在 Ω 内解析的函数 $f(z)$，如果属于 Hardy 族 H_1，则可表为 Cauchy 积分

和 Schwarz 积分，而且 $f(z)\in H_1$ 是 $f(z)$ 可表为 Poisson 积分的充要条件．（龚昇，孙继广[1]．）

由于这些结果以后要用到，我们给予证明如下．

若 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$，$\Omega$ 满足上述条件，$\mathscr{L}$ 是它的特征流形，称 Ω 内解析的函数 $f(z)$ 属于 Hardy 族 H_1，若

$$\int_{\mathscr{L}}|f(r\xi)|\dot{\xi}$$

对 $0\leqslant r<1$ 一致有界，这里 $\xi\in\mathscr{L}$，$\dot{\xi}$ 表示 $\mathscr{L}$ 的体积元素．我们有

定理 0.2.1 若 $f(z)\in H_1$，则 $f(z)$ 可以表为 Cauchy 积分．

证 华罗庚[1]证明了：对于上述圆型域 Ω，存在一组完备正交函数系 $\psi_m(z)$，它在 $\mathscr{L}$ 上是就范正交的，于是 Ω 的 Cauchy 核（Cauchy-Szegö 核，简称 Cauchy 核，下同）$H(z,\bar{\xi})$ 等于

$$\sum_{m=0}^{\infty}\psi_m(z)\overline{\psi_m(\xi)},\tag{0.2.1}$$

这里 $z\in\Omega$，$\xi\in\mathscr{L}$，而每一个 $\psi_m(z)$ 为齐次多项式．由假设 $f(z)\in H_1$，根据 Bochner[1]的一条定理知道，境界值 $f(\xi)$ 绝对可积．于是作 Cauchy 型积分

$$g(z)=\int_{\mathscr{L}}f(\xi)H(z,\bar{\xi})\dot{\xi},$$

它是存在的，并且表示一个对 z 的解析函数．由 Cauchy 核的定义，知

$$g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_m(z)\int_{\mathscr{L}}f(\xi)\overline{\psi_m(\xi)}\dot{\xi},$$

这是因为固定 z 时，级数(0.2.1)的收敛对 ξ 是一致的．记

$$C_m=\int_{\mathscr{L}}f(\xi)\overline{\psi_m(\xi)}\dot{\xi},\tag{0.2.2}$$

于是
$$g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\psi_m(z).$$

因为 $f(z)$ 在 Ω 内解析，故有 Taylor 展开

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\psi_m(z),$$

取 $z=r\eta$, $\eta\in\mathscr{L}$, $0<r<1$, 由于 ψ_m 为齐次多项式, 设其次数为 k_m, 则

$$f(r\eta)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m r^{k_m}\psi_m(\eta).$$

当 $r<1$ 固定时, 它对 η 在 $\mathscr{L}$ 上的收敛是一致的. 于是

$$\int_{\mathscr{L}}f(r\xi)\overline{\psi_m(\xi)}\dot{\xi}=\int_{\mathscr{L}}\sum_{l=0}^{\infty}a_l r^{k_l}\psi_l(\xi)\overline{\psi_m(\xi)}\dot{\xi}=r^{k_m}a_m. \tag{0.2.3}$$

由(0.2.2), (0.2.3)得

$$C_m-a_m r^{k_m}=\int_{\mathscr{L}}(f(\xi)-f(r\xi))\psi_m(\xi)\dot{\xi}.$$

因而 $$|C_m-a_m r^{k_m}|\leqslant M_m\int_{\mathscr{L}}|f(\xi)-f(r\xi)|\dot{\xi},$$

此处 $M_m=\max\limits_{\xi\in\mathscr{L}}|\psi_m(\xi)|$. 由于 ψ_m 为齐次多项式, $\mathscr{L}$ 是紧致的, 故 M_m 是存在的. 令 $r\to1$, 由 Riesz 定理知 $C_m=a_m$, 故 $g(z)=f(z)$, 即 $f(z)$ 可以用 Cauchy 积分表达

$$f(z)=\int_{\mathscr{L}}f(\xi)H(z,\bar{\xi})\dot{\xi}, \tag{0.2.4}$$

证毕.

如果 $f(z)\in H_1$, 则由定理 0.2.1, 它可表为 Cauchy 积分, 即 (0.2.4) 成立. 固定 $w\in\Omega$ 时, $f(z)H(z,\bar{w})$ 也属于 H_1, 故由 (0.2.4),

$$\int_{\mathscr{L}}f(\xi)H(\xi,\bar{w})\dot{\xi}=f(0).$$

取共轭, 得

$$\int_{\mathscr{L}}\overline{f(\xi)}\,H(w,\bar{\xi})\dot{\xi}=\overline{f(0)}. \tag{0.2.5}$$

在(0.2.5)中取 $w=z$, 于是

$$\int_{\mathscr{L}}(f(\xi)+\overline{f(\xi)})H(z,\bar{\xi})\dot{\xi}=f(z)+\overline{f(0)},$$

即
$$f(z)=\int_{\mathscr{L}}(f(\xi)+\overline{f(\xi)})H(z,\bar{\xi})\dot{\xi}$$
$$-\frac{1}{2}(f(0)+\overline{f(0)})+i\mathrm{Im}f(0)$$
$$=\int_{\mathscr{L}}(f(\xi)+\overline{f(\xi)})H(z,\bar{\xi})\dot{\xi}$$
$$-\frac{1}{2V(\mathscr{L})}\int_{\mathscr{L}}(f(\xi)+\overline{f(\xi)})\dot{\xi}+i\,\mathrm{Im}\,f(0),$$
这里$V(\mathscr{L})$表示$\mathscr{L}$的体积. 所以, 若记$f(z)=u(z)+iv(z)$, 则有
$$f(z)=\int_{\mathscr{L}}u(\xi)\left(2H(z,\bar{\xi})-\frac{1}{V(\mathscr{L})}\right)\dot{\xi}+i\,\mathrm{Im}f(0).$$
我们称
$$S(z,\xi)=2H(z,\bar{\xi})-\frac{1}{V(\mathscr{L})} \tag{0.2.6}$$
为Ω的 Schwarz 核. 于是有

定理 0.2.2 若$f(z)\in H_1$, 则$f(z)$可以表为 Schwarz 积分
$$f(z)=\int_{\mathscr{L}}u(\xi)S(z,\xi)\dot{\xi}+i\,\mathrm{Im}f(0), \tag{0.2.7}$$
其中$u(z)=\mathrm{Re}f(z)$, $S(z,\xi)$如(0.2.6)所示.

华罗庚从 Cauchy 核出发, 定义
$$P(z,\xi)=\frac{H(z,\bar{\xi})H(\xi,\bar{z})}{H(z,\bar{z})} \tag{0.2.8}$$
为 Poisson 核, 并称由$\mathscr{L}$上的连续函数$u(\xi)$所定义的 Poisson 积分$\int_{\mathscr{L}}u(\xi)P(z,\xi)\dot{\xi}$为调和函数.

由定理 0.2.1, 可得

定理 0.2.3 若$f(z)$在Ω中解析, 则$f(z)$可以表为 Poisson 积分
$$f(z)=\int_{\mathscr{L}}f(\xi)P(z,\xi)\dot{\xi} \tag{0.2.9}$$
的充分必要条件为$f(z)\in H_1$.

证 充分性. 若$f(z)\in H_1$, 则当w固定时, 易见
$$f(z)H(z,\bar{w})\in H_1,$$

故由定理 0.2.1, 有

$$f(z)H(z, \bar{w})=\int_{\mathscr{L}} f(\xi)H(\xi, \bar{w})H(z, \bar{\xi})\dot{\xi}.$$

特别取 $w=z$, 除以 $H(z, \bar{z})$ 即得(0.2.9).

必要性. 若 $f(z)$ 可以表为(0.2.9), 取 $z=r\eta(0\leqslant r<1), \eta\in\mathscr{L}$, 则

$$\int_{\mathscr{L}}|f(r\eta)|\dot{\eta}\leqslant\int_{\mathscr{L}}\int_{\mathscr{L}}|f(\xi)|P(r\eta, \xi)\dot{\xi}\dot{\eta}. \qquad (0.2.10)$$

由于 $P(r\eta, \xi)=P(r\xi, \eta)$, 故(0.2.10)的右端为

$$\int_{\mathscr{L}}\int_{\mathscr{L}}|f(\xi)|P(r\xi, \eta)\dot{\xi}\dot{\eta}=\int_{\mathscr{L}}\left(\int_{\mathscr{L}}P(r\xi, \eta)\dot{\eta}\right)|f(\xi)|\dot{\xi}$$

$$=\int_{\mathscr{L}}|f(\xi)|\dot{\xi},$$

所以 $f(z)\in H_1$. 这里的积分次序能够交换是因为 $|f(\xi)|$ 可积, 而且当 $0<r<1$ 固定时, $P(r\xi, \eta)$ 对 ξ, η 在 $\mathscr{L}$ 上是连续的, 这里同时利用了 Poisson 核的性质

$$\int_{\mathscr{L}}P(z, \xi)\dot{\xi}=1 \qquad (z\in\Omega).$$

在单复变数时, Poisson 核为 Schwarz 核的实部. 在现在一般来说是不对的, 因为调和函数未必是解析函数的实部. Schwarz 核的实部为

$$B(z, \xi)=H(z, \bar{\xi})+H(\xi, \bar{z})-\frac{1}{V(\mathscr{L})}, \qquad (0.2.11)$$

虚部为

$$C(z, \xi)=\frac{1}{i}(H(z, \bar{\xi})-H(\xi, \bar{z})). \qquad (0.2.12)$$

从 Schwarz 公式, 即得: 若 $f(z)=u(z)+iv(z)\in H_1$, 则

$$u(z)=\int_{\mathscr{L}}u(\xi)B(z, \xi)\dot{\xi}, \qquad (0.2.13)$$

$$v(z)=\int_{\mathscr{L}}u(\xi)C(z, \xi)\dot{\xi}+\mathrm{Im}f(0). \qquad (0.2.14)$$

从(0.2.13)、(0.2.14)可得，若$f(z)\in H_1$，则

$$f(z)=\int_{\mathscr{L}}f(\xi)B(z,\ \xi)\dot{\xi},\tag{0.2.15}$$

$$f(z)=i\int_{\mathscr{L}}f(\xi)C(z,\ \xi)\dot{\xi}+f(0).\tag{0.2.16}$$

即当$f(z)\in H_1$时，$f(z)$可以用$B(z,\ \xi)$，$C(z,\ \xi)$为核的积分表示之．B-调和函数也能用这些核来表达，问题在于对B-调和函数来讲，Dirichlet 问题未必有解，并且容易看出$B(z,\ \xi)$、$C(z,\ \xi)$都不是正的．例如，若$\eta\in\mathscr{L}$，则$B(r\eta,\ -\eta)$等于

$$\frac{2}{V(\mathscr{L})}\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+n-1}^{m}(-r)^m-\frac{1}{V(\mathscr{L})}=\frac{1}{V(\mathscr{L})}\left(\frac{2}{(1+r)^n}-1\right),$$

若$n>1$，且r充分接近1时，这是小于零的．

关于 Poisson 积分的进一步研究，请参阅华罗庚[1]，华罗庚与陆启铿[1]以及龚昇、史济怀[1]等．

一般来说，对于$\mathbb{C}^n$中的域，很难将 Cauchy-Szegö 核明确地写出来．但对于强拟凸域(见§0.4)，Fefferman[1]及 Boutet de Monvel-Sjöstrand[1] 得出如下的重要结果：

若Ω为强拟凸域，则当$z\in\overline{\Omega}$，$w\in b\Omega$，$z\neq w$时，Cauchy-Szegö 核$H(z,\ w)$对z，w而言均属于C^∞，且

$$H(z,\ w)=F(z,\ w)\psi^{-n}(z,\ w)+G(z,\ w)\log\psi(z,\ w),$$

这里F，G，$\psi\in C^\infty(\overline{\Omega}\times b\Omega)$，$\psi$由$b\Omega$明确地表达出来．若$z\neq w$，则$\mathrm{Re}(\psi(z,\ w))>0$；当$w\in b\Omega$时，$F(w,\ w)\neq0$．

这就明确地给出当$z=w$时，$H(z,\ w)$的奇性．

§ 0.3　Cauchy-Fantappiè 核

另一种重要观点是从外微分形式的观点来看待 Cauchy 核．由于当$z\neq w$时，

$$d\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{w-z}\,dw\right)=0,$$

这里 d 是对 w 作用，所以应用 Stokes 定理，立即可以得到 Cauchy 积分定理.

于是从外微分形式的观点，问题成为：对于 $\mathbb{C}^n$ 中的域 Ω，可否找到一个外微分形式，

(i) 对在 Ω 中解析，在 $\overline{\Omega}$ 上连续的函数 $f(z)$，具有再生性质

$$f(z)=\int_{w\in b\Omega} H(z,\ w)f(w)d\sigma_w,\qquad z\in\Omega,\qquad (0.3.1)$$

这里 $d\sigma_w$ 为 $b\Omega$ 上的 Lebesgue 面积.

(ii) (0.3.1)当 $z\in\Omega$ 时不是奇异积分，而 $z\in b\Omega$ 时为奇异积分.

(iii) 当 $z\in\overline{\Omega}$, $w\in b\Omega$, $w\neq z$ 时, $H(z,\ w)\in C^\infty$, 对每个 $w\in b\Omega$, $H(z,\ w)$ 在 $z\in\overline{\Omega}-\{w\}$ 中解析.

(iv) 可以用 Stokes 定理.

在这方面最重要的核是 Cauchy-Fantappiè 核. 设 U 为 $\mathbb{C}^n$ 中任意开集, $z\in\mathbb{C}^n$ 为固定参数, $g_1(z,\ w)$, $\cdots$, $g_n(z,\ w)$是在 $w\in U$ 上的 C^∞ 的 w 的复值函数. Cauchy-Fantappiè 形式（简写为 C-F 形式）为

$$K(z,\ w)\equiv\frac{C_n}{g^n}\omega dw_1\wedge\cdots\wedge dw_n,\qquad (0.3.2)$$

此处
$$g(z,\ w)=\sum_{i=1}^n(w_i-z_i)g_i(z,\ w),$$

$$\omega=g_1\bar\partial g_2\wedge\cdots\wedge\bar\partial g_n-g_2\bar\partial g_1\wedge\bar\partial g_3\wedge\cdots\wedge\bar\partial g_n$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}g_n\bar\partial g_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial g_{n-1},$$

$$C_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!(2\pi i)^{-n}.$$

$K(z,\ w)$为 w 的$(n,\ n-1)$形式，以 z 为参数，在使 $g(z,\ w)\neq 0$ 的 U 的子集上定义.

可以证明(Koppelman[1])：若 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 为有界、光滑域，当 $z\in\Omega$, w 在 $b\Omega$ 的邻域时, $K(z,\ w)$ 为一 C-F 形式. 若 f 在 Ω 中解析，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，则

$$f(z)=\int_{w\in b\Omega}K(z,\ w)f(w). \tag{0.3.3}$$

还可证明(Norguet[1]), C-F 形式(0.3.2)中的分子可写成

$$C_n\omega\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n=\frac{1}{(2\pi i)^n}G\wedge(\bar{\partial}G)^{n-1},$$

这里 G 为(1,0)形式

$$G=\sum_{j=1}^{n}g_j(z,\ w)dw_j, \tag{0.3.4}$$

而 ∂ 是对 w 作用的, 指数 $n-1$ 表示 $n-1$ 次外乘积.

对于 $\mathbb{C}^n$ 中超球 $z\bar{z}'<1$, 选取 $g_i(z,\ w)=\bar{w}_i$, 于是当 $z\in\Omega$, $w\in b\Omega$ 时, 则

$$g=\sum_{i=1}^{n}(w_i-z_i)g_i=\sum_{i=1}^{n}(w_i-z_i)\bar{w}_i=1-z\bar{w}'\neq 0.$$

此时
$$G=\sum\bar{w}_j dw_j=\partial\phi,\quad \phi=|w|^2.$$

于是(0.3.2)的分子成为

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\partial\phi\wedge(\bar{\partial}\partial\phi)^{n-1}=Cd\sigma_w.$$

由于
$$\int_{w\bar{w}'=1}\frac{Cd\sigma_w}{(1-z\bar{w}')^n}=1,$$

可直接算出 $C=\omega_{n-1}^{-1}$.

也就是: 超球的 Cauchy-Fantappiè 核, 也是(0.2.1). 一般来说, 对于一个域来讲, Cauchy-Szegö 核与 Cauchy-Fantappiè 核是不一致的, 但在超球的情形, 二者是一致的. 所以我们称(0.2.1)为超球的 Cauchy 核. 不但如此, 这样得到的 Cauchy 核的确满足本节中所要求的条件(i)～(iv). 但一般来说, 如果域是任意取的, 或是 $g_i(z,\ w)$ 任意取定, 则这样得到的 Cauchy-Fantappiè 核来必满足所要求的条件(i)～(iv), 尤其是条件(iii)中的: 对每个 $w\in b\Omega$, $H(z,\ w)$ 在 $z\in\bar{\Omega}-\{w\}$ 中解析这一条. 例如, Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 中的有界、光滑域, 取

$$g_i=\bar{w}_i-\bar{z}_i,$$

这样得到的 Cauchy-Fantappiè 核即为

$$K_{(2n-1)}(w,\ z)=\sigma\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial w_{\alpha}}\frac{1}{[r(w-z)]^{2n-2}}$$
$$dw_1\wedge\cdots\wedge dw_n\wedge\overline{dw_1}\wedge\cdots\wedge\overline{dw_{\alpha-1}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw_{\alpha+1}}\wedge\cdots\wedge\overline{dw_n},$$
$$w\in\Omega,\ z\in d\Omega,\qquad(0.3.5)$$

这里 $r(w-z)$ 表示 z 与 w 二点的欧氏距离.

(0.3.5) 即为 Bochner-Martinelli 核. 这个核虽然有简洁的形式, 再生性质等等, 但它不再是 z 的解析函数, 当 $z\in\overline{\Omega}-\{w\}$ 时.

问题是: 对于怎样的域, 我们可以找到满足本节中所要求的条件 (i)～(iv) 的 Cauchy-Fantappiè 核. Henkin (Хенкин) [1] 及 Ramirez[1], 之后 Kerzman 与 Stein[1]在这方面作了重要的贡献, 他们对强拟凸域分别用 $\bar\partial$ 问题的解或层论, 给出了满足本节中所要求的条件 (i)～(iv) 的 Cauchy-Fantappiè 核, 现在通常称之为 Henkin-Ramirez 核以及 Stein-Kerzman 核.

§0.4 Henkin-Ramirez 核与 Stein-Kerzman 核

如上所述, 对于十分重要的强拟凸域, Henkin 及 Ramirez, 之后 Kerzman 与 Stein 分别应用 $\bar\partial$ 问题的解, 求解除法问题或是用层论等方法, 给出了满足上节中所要求的解析的 Cauchy-Fantappiè 核. 由于这些方法不可能在此作详细的介绍, 所以只能在这里介绍一个大概的想法, 有兴趣的读者可以阅读他们原来的著作.

先来介绍一下什么叫强拟凸域, 定义如下:

若 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 为一有界、光滑域. 这域由函数 λ 所定义: λ 为实值函数, 且在 $\overline{\Omega}$ 的一个邻域中属于 C^∞. $\lambda(z)<0$ 若 $z\in\Omega$; $\lambda(z)=0$ 若 $z\in b\Omega$; $\lambda(z)>0$ 若 $z\notin\overline{\Omega}$; $\mathrm{grad}\lambda(z)\neq0$ 若 $z\in b\Omega$, 以及

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}(z)\eta_i\overline{\eta}_j\geqslant C|\eta|^2,\qquad(0.4.1)$$

对任意的 $\eta=(\eta_1, \cdots, \eta_n)\in\mathbb{C}^n$ 都成立，而 C 为一与 $z\in\overline{\Omega}$ 无关的正常数．Ω 称为强拟凸域．

条件 (0.4.1) 表示对于每个由 η 决定的复方向，λ 为次调和的．

现在来介绍 Henkin-Ramirez 核．也就是来说明如何构造 $g_i(z, w)$ 即可．

对于 $w\in b\Omega$, $z\in\Omega$, z 靠近 w 时，令

$$g_i(z, w)=\frac{\partial\lambda}{\partial w_i}(w)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial w_i\partial w_j}(w)(z_j-w_j). \quad (0.4.2)$$

可以证明：由这样定义的 $g_i(z, w)$，使(0.3.2)的分母 $g(z, w)$ 不等于零．

对 λ 在 w 处展开到二阶：

$$\begin{aligned}\lambda(z)=\lambda(w)&+2\mathrm{Re}\Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial w_i}(w)(z_i-w_i)\\&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial w_i\partial w_j}(w)(z_i-w_i)(z_j-w_j)\Big]\\&+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial w_i\partial\overline{w}_j}(w)(z_i-w_i)\overline{(z_j-w_j)}+\text{三阶项}. \quad (0.4.3)\end{aligned}$$

于是 $$\lambda(z)=\lambda(w)-2\mathrm{Re}g(z, w)+L(z, w),$$

这里 $L(z, w)\geqslant C|z-w|^2$，$C$ 为常数(由于 z 充分靠近 w，故三阶项可以吸收到二阶项中去)．但是 $\lambda(z)<0$, $\lambda(w)=0$，故有

$$\mathrm{Re}g(z, w)\geqslant C|z-w|^2.$$

因之 $g(z, w)\neq 0$．显然 $g_i(z, w)$ 为 z 的解析函数，我们这样得到的局部函数分别记作 $g_i^L(z, w)$ 及 $g^L(z, w)$．

对于局部函数 $g^L(z, w)$，我们"扩展"到一个新的整体函数 $g(z, w)$ 上去．这个 $g(z, w)$ 当 $z\in\overline{\Omega}$ 时，为解析的，当 $z\in\overline{\Omega}-\{w\}$ 时，$g(z, w)\neq 0$．"扩展"的意义为：当 z 靠近 w 时，

$$g(z, w)=g^L(z, w)\phi(z, w),$$

这里 $\phi(z, w)$ 为局部定义的函数(当 z 靠近 w 时)，且为 z 的解析函

数；而且 $\phi(w, w)\neq 0$. 于是 $g(z, w)$ 与 $g^L(z, w)$ 当 z 靠近 w 时有相同的零点. 这样得到了 $g(z, w)$ 后，我们可以用解除法问题

$$g(z, w)=\sum(w_i-z_i)g_i(z, w)$$

来求得 $g_i(z, w)$. 这样得到的 $g_i(z, w)$ 是 z 的解析函数。

这是 Henkin-Ramirez 核求得的大概情形.

至于 Stein-Kerzman 核，其求得的大致过程如下：

直接将上面求得的 $g_i^L(z, w)$"扩展"，即当 z 靠近 w 时，

$$g_i(z, w)=g_i^L(z, w),$$

这样得到的 Cauchy-Fantappiè 形式记作 $E(z, w)$，而这时 $E(z, w)$ 当 z 靠近 w 时，是 z 的解析函数. 然后加上一个"修正"部分 $C(z, w)$，使得 $H(z, w)=E(z, w)+C(z, w)$ 在整体是 z 的解析函数. 而

$$C(z, w)\in C^\infty(U(\overline{\Omega})\times V(b\Omega)),$$

这里 $U(\overline{\Omega})$ 及 $V(b\Omega)$ 分别为 $\overline{\Omega}$ 及 $b\Omega$ 的邻域，即在对角线上(即 $w=z$)时，$C(z, w)$ 仍为 C^∞. $C(z, w)$ 由解一 $\bar{\partial}$ 问题得到.

由于 $E(z, w)$ 可以明确地表达出来，一切非构造性的东西全归到 $C(z, w)$ 中去，而 $C(z, w)$ 是一个 C^∞ 的核，所以在使用时有其方便之处。

第一章　超球的 Cauchy 型积分

§1.1　引　　言

本书从研究最简单、最基本的不可约域，$\mathbb{C}^n$ 中的超球的 Cauchy 型积分开始.

在 § 0.2 及 § 0.3 中已经指出，不论是从 Hilbert 空间的观点还是从外微分形式的观点来推广单复变数的 Cauchy 核，当域为 $\mathbb{C}^n$ 中的超球时，两者是一致的．它都为

$$\omega_{2n-1}^{-1}(1-z\bar{u}')^{-n}\dot{u},$$

这里 $u=(u_1, \cdots, u_n)$, $z=(z_1, \cdots, z_n)$, $u\bar{u}'=1$, $z\bar{z}'<1$，而 ω_{2n-1} 为 $u\bar{u}'=1$ 的体积，它等于 $\dfrac{2\pi^n}{\Gamma(n)}$, $\dot{u}$ 为 $u\bar{u}'=1$ 上的体积元素.

有了 Cauchy 核就可以有 Cauchy 型积分．若 $f(u)$ 为 $u\bar{u}'=1$ 上的可积函数，则当 $z\bar{z}'<1$ 时，Cauchy 型积分

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n} \tag{1.1.1}$$

存在，而当 $z\bar{z}'>1$ 时，Cauchy 型积分 (1.1.1) 就失去意义．任取一点 $z=(\lambda, 0, \cdots, 0)U$, $\lambda>1$, $U\bar{U}'=I$, I 表示单位方阵，则

$$u=\left(\frac{1}{\lambda}, \sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}}, 0, \cdots, 0\right)U$$

时，$1-z\bar{u}'=0$．所以 (1.1.1) 所定义的 Cauchy 型积分不存在.

当考虑 Cauchy 型积分趋于边界上的点 ξ 时，其极限值可以用奇异积分的 Cauchy 主值来表示．在定义 Cauchy 主值时，如果取 ξ 的邻域为“圆”，在 §1.2～§1.5 中将证明，这样的 Cauchy 主值是存在的，且证明了相应的 Plemelj 公式．如果取 ξ 的邻域为“椭圆”或是“长方形”，在 §1.6～§1.8 中将分别证明：这些 Cauchy 主值是存在的，且证明了相应的 Plemelj 公式．有趣的是，这时所得到的极限值可以用种种不同的 Cauchy 主值及 Plemelj 公式表达之．这充分显示了多复变数与单复变数的本质的区别．“椭圆”的情形，可以看作“圆”的情形的一种推广．

这一章的内容取自龚昇、孙继广[2]，龚昇、史济怀[4]，史济怀[1]．

这一章的结果，将在第六章中推广到强拟凸域上去．并且可以看出，这一章的结果对以后的几章都是起作用的．

§1.2 一条引理

为了研究超球的 Cauchy 型积分，我们需要以下一条引理．

由于
$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}=1,$$
特别取 $z=(\rho, 0, \cdots, 0)$，$0\leqslant\rho<1$，于是
$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n}=1.$$

引理 1.2.1
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ |1-\bar{u}_1|>\varepsilon}}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}$$
是存在的，且等于 $\frac{1}{2}$．

证 已知有
$$1=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\left(\int_{\Sigma}+\int_{\sigma}\right)\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n}=I_1+I_2, \tag{1.2.1}$$

这里　　Σ: $\begin{cases} u\bar{u}'=1, \\ |1-\bar{u}_1|\geqslant\varepsilon, \end{cases}$　　σ: $\begin{cases} u\bar{u}'=1, \\ |1-\bar{u}_1|\leqslant\varepsilon. \end{cases}$

先来看 I_2:

$$I_2=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_\sigma\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n}. \tag{1.2.2}$$

令 $\bar{u}_1=re^{i\theta}$, $u_2=v_2$, $\cdots$, $u_n=v_n$, 记 $v=(v_2,\ \cdots,\ v_n)$, 于是 σ 为

$$\begin{cases} v\bar{v}'=1-r^2, \\ \cos\theta\geqslant\dfrac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r}. \end{cases}$$

这样，

$$I_2=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'\leqslant 2\varepsilon-\varepsilon^2}\dot{v}\int_{-a}^{a}\frac{d\theta}{(1-\rho re^{i\theta})^n}$$

$$\left(a=\cos^{-1}\frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r}\right).$$

记

$$\begin{aligned} J&=\int_{-a}^{a}\frac{d\theta}{(1-\rho re^{i\theta})^n} \\ &=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)}\int_{-a}^{a}(\rho r)^p e^{ip\theta}d\theta \\ &=2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)}(\rho r)^p\frac{\sin pa}{p}+2a \\ &=2\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)}\frac{(\rho re^{ia})^p}{p}\right\}+2a. \end{aligned}$$

由于

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+p)x^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)}=\frac{1}{(1-x)^n},$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+p)x^{p-1}}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)}&=\frac{1}{x(1-x)^n}-\frac{1}{x}=\frac{1-(1-x)^n}{x(1-x)^n} \\ &=\frac{1-y^n}{(1-y)y^n}=\frac{1+y+\cdots+y^{n-1}}{y^n} \\ &=\frac{1}{y}+\cdots+\frac{1}{y^n} \\ &=\frac{1}{(1-x)^n}+\cdots+\frac{1}{1-x}\quad (y=1-x). \end{aligned}$$

这就得到

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+p)x^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)p}=\int_0^x\frac{1-(1-x)^n}{x(1-x)^n}\,dx$$

$$=\frac{1}{(n-1)(1-x)^{n-1}}+\cdots$$

$$+\frac{1}{1-x}+\log\frac{1}{1-x}-\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu},$$

所以

$$J=2\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{(n-1)(1-\rho re^{i\alpha})^{n-1}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-\rho re^{i\alpha}}+\log\frac{1}{1-\rho re^{i\alpha}}\right\}+2\alpha,$$

$$I_2=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\mathrm{Im}\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu(1-\rho re^{i\alpha})^{\nu}}\right.$$

$$\left.+\log\frac{1}{1-\rho re^{i\alpha}}\right\}\dot{v}+\frac{2\alpha}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\dot{v}$$

$$=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\mathrm{Im}\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\frac{\dot{v}}{\nu(1-\rho re^{i\alpha})^{\nu}}\right.$$

$$\left.+\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\log\frac{1}{1-\rho re^{i\alpha}}\dot{v}\right\}$$

$$+\frac{2\alpha}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\dot{v}$$

$$=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\mathrm{Im}\left\{\sum_{p=1}^{n-1}K_p+K_0\right\}+\frac{2\alpha}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\dot{v},\qquad(1.2.3)$$

此处

$$K_p=\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\frac{\dot{v}}{p(1-\rho re^{i\alpha})^p},$$

$$K_0=\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\log\frac{1}{1-\rho re^{i\alpha}}\dot{v}.$$

先来看 I_2 表达式中的最后一项

$$\frac{2\alpha}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\dot{v}$$

注意到 $\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\dot{v}$ 是以 $\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}$ 为半径，以原点为中心的 $2n-2$ 维球的体积，由定义知

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r}\right).$$

由于 $\frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r}\leqslant 1$, 所以 $(1-r)^2\leqslant\varepsilon^2$, 以至当 $\varepsilon\to 0$ 时, $a=O(\varepsilon)$, 于是

$$\frac{2a}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'\leqslant 2\varepsilon-\varepsilon^2}\dot{v}=O\left(\varepsilon^{\frac{2n-2}{2}+1}\right)=O(\varepsilon^n).$$

再来考虑其它项. 由于 a 的定义,

$$\begin{aligned}re^{ia}&=\frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2}+ir\sqrt{1-\left(\frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r}\right)^2}\\&=\frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{4r^2-(1+r^2)^2+2\varepsilon^2(1+r^2)-\varepsilon^4}\\&=\frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2}+\frac{i}{2}[2\varepsilon^2(1+r^2)-(1-r^2)^2-\varepsilon^4]^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{2-v\bar{v}'-\varepsilon^2}{2}+\frac{i}{2}[2\varepsilon^2(2-v\bar{v}')-(v\bar{v}')^2-\varepsilon^4]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

所以, 当 $p\geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}K_p&=\frac{1}{p}\int_{v\bar{v}'\leqslant 2\varepsilon-\varepsilon^2}\Big[1-\rho\,\frac{2-v\bar{v}'-\varepsilon^2}{2}\\&\qquad-\frac{i\rho}{2}(2\varepsilon^2(2-v\bar{v}')-(v\bar{v}')^2-\varepsilon^4)^{\frac{1}{2}}\Big]^{-p}\dot{v}\\&=\frac{1}{p}\int_{v\bar{v}'\leqslant 2\varepsilon-\varepsilon^2}\Big[1-\rho+\rho\,\frac{v\bar{v}'+\varepsilon^2}{2}\\&\qquad-\frac{i\rho}{2}(2\varepsilon^2(2-v\bar{v}')-(v\bar{v}')^2-\varepsilon^4)^{\frac{1}{2}}\Big]^{-p}\dot{v}.\end{aligned}$$

用球坐标, 则 K_p 等于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\int_0^{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}\left(1-\rho+\rho\,\frac{\varepsilon^2+s^2}{2}-\frac{i\rho}{2}\sqrt{2\varepsilon^2(2-s^2)-s^4-\varepsilon^4}\right)^{-p}\\&\qquad\cdot s^{2n-3}ds\int_0^{\pi}\sin^{2n-4}\varphi_1 d\varphi_1\cdots\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_{2n-5}\,d\varphi_{2n-5}\\&\qquad\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi_{2n-4}d\varphi_{2n-4}\int_0^{2\pi}d\varphi_{2n-3}\\&=\frac{2\pi^{n-1}}{p(n-2)!}\int_0^{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}\Big[(1-\rho)+\rho\,\frac{\varepsilon^2+s^2}{2}\\&\qquad-\frac{i\rho}{2}\sqrt{4\varepsilon^2-(s^2+\varepsilon^2)^2}\Big]^{-p}s^{2n-3}ds.\end{aligned}$$

当 $\varepsilon>0$ 固定时，由 Lebesgue 定理，

$$\lim_{\rho\to1}\int=\int\lim_{\rho\to1},$$

于是
$$J_p=\lim_{\rho\to1}K_p=\lim_{\rho\to1}\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}p(1-\rho re^{i\alpha})^{-p}\dot{v}$$

$$=\frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!p}\int_0^{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}\left[\frac{\varepsilon^2+s^2}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{4s^2-(s^2+\varepsilon^2)^2}\right]^{-p}s^{2n-3}ds.$$

可以用 Lebesgue 定理的原因，是这时被积函数的绝对值为

$$\left[(1-\rho)^2+2\rho(1-\rho)\frac{\varepsilon^2+s^2}{2}+\rho^2\varepsilon^2\right]^{\frac{-p}{2}}s^{2n-3}$$

$$=\left[(1-\rho)^2+\rho(1-\rho)s^2+\rho\varepsilon^2\right]^{\frac{-p}{2}}s^{2n-3}$$

$$\leqslant\frac{2s^{2n-3}}{\varepsilon^p}\quad(\text{只要 }1\geqslant\rho\geqslant2^{\frac{-2}{n-1}}).$$

由于
$$|J_p|\leqslant\frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!p}\int_0^{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}\frac{s^{2n-3}ds}{\varepsilon^p}=\frac{\pi^{n-1}(2-\varepsilon)^{n-1}\varepsilon^{n-p-1}}{(n-1)!p},$$

所以当 $p<n-1$ 时，$J_p=O(\varepsilon^{n-p-1})$；而当 $p=n-1$ 时，记

$$\eta=\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2},\quad s=\eta R,$$

于是
$$J_{n-1}=\frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1\left[\frac{R^2+\varepsilon^2\eta^{-2}}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{4\eta^{-4}\varepsilon^2-(R^2+\varepsilon^2\eta^{-2})^2}\right]^{-n+1}R^{2n-3}dR.$$

再应用 Lebesgue 定理，得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_{n-1}=\frac{2^n\pi^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1\frac{R^{2n-3}dR}{(R^2-i\sqrt{1-R^4})^{n-1}}.$$

令 $R^2=t$，上式即为

$$\frac{(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1\frac{t^{n-2}dt}{(t-i\sqrt{1-t^2})^{n-1}}$$

$$=\frac{(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{i(n-1)\theta}\cos^{n-2}\theta\sin\theta d\theta.$$

注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta\sin\theta e^{i(n-1)\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{i(n-1)\theta}d\left(\frac{-\cos^{n-1}\theta}{n-1}\right)$$

$$=\frac{-e^{i(n-1)\theta}\cos^{n-1}\theta}{n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\cdot e^{i(n-1)\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{n-1}+i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\cdot e^{i(n-1)\theta}d\theta,$$

所以 $$\operatorname{Im}(\lim_{\varepsilon\to 0}J_{n-1})=\frac{(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\cdot\cos(n-1)\theta d\theta$$

$$=\frac{(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi^n}{(n-1)!2},$$

即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}J_{n-1}=\frac{\pi^n}{(n-1)!2}. \tag{1.2.4}$$

我们还看到

$$K_0=\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\log\frac{1}{1-\rho re^{i\alpha}}\dot{v}$$

$$=\int_{v\bar{v}'<2\varepsilon-\varepsilon^2}-\log\Big(1-\rho+\rho\frac{v\bar{v}'+\varepsilon^2}{2}$$

$$-\frac{i\rho}{2}\sqrt{2\varepsilon^2(2-v\bar{v}')-(v\bar{v}')^2-\varepsilon^4}\Big)\dot{v}.$$

用球坐标

$$J_0=\int_0^{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}-s^{2n-3}\log\left[\frac{\varepsilon^2+s^2}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{2\varepsilon^2(2-s^2)-s^4-\varepsilon^4}\right]$$

$$\cdot ds\int_0^{\pi}\sin^{2n-4}\varphi_1 d\varphi_1\cdots\int_0^{2\pi}d\varphi_{2n-3}$$

$$=\frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!}\int_0^{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}-s^{2n-3}\log\Big[\frac{\varepsilon^2+s^2}{2}$$

$$-\frac{i}{2}\sqrt{2\varepsilon^2(2-s^2)-s^4-\varepsilon^4}\Big]ds,$$

记 $s=\eta R$,

$$J_0=\frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!}\eta^{2n-2}\int_0^1-R^{2n-3}\log\left[\eta^2\left(\frac{R^2+\varepsilon^2\eta^{-2}}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{i\eta^2}{2}\sqrt{4\eta^{-4}\varepsilon^2-(R^2+\varepsilon^2\eta^{-2})^2}\right]dR$$

$$=\frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!}\frac{2\eta^{2n-2}\ln\frac{\sqrt{2}}{\eta}}{2n-2}$$
$$+\frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!}\eta^{2n-2}\int_0^1-R^{2n-3}\log[R^2+\varepsilon^2\eta^{-2}$$
$$-i\sqrt{4\eta^{-4}\varepsilon^2-(R^2+\varepsilon^2\eta^{-2})^2}]dR=o(1),$$

最后得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\rho\to1}J_2=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\cdot\frac{\pi^n}{(n-1)!2}=\frac{1}{2}. \tag{1.2.5}$$

这样，从

$$1=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_\Sigma\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n}+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_\sigma\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n}$$

得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\rho\to1}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-\bar{u}_1|>\varepsilon}}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n}=\frac{1}{2}. \tag{1.2.6}$$

今定义 Cauchy 主值

$$\text{v.p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-\bar{u}_1|>\varepsilon}}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}, \tag{1.2.7}$$

于是有

$$\text{v.p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}=\frac{1}{2}. \tag{1.2.8}$$

§1.3 Cauchy 主值

设函数 $f(u)$ 定义在 $u\bar{u}'=1$ 上，如果对于任意二点 u 及 v，$u\bar{u}'=1$，$v\bar{v}'=1$，恒有

$$|f(u)-f(v)|=O([(u-v)\overline{(u-v)}']^{\frac{\alpha}{2}})$$
$$=O((2-u\bar{v}'-v\bar{u}')^{\frac{\alpha}{2}}),$$

则称 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lip α, 此处 $0<\alpha\leqslant 1$.

利用 §1.2 的结果, 可以建立如下的

定理 1.3.1 若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lip α, 则 Cauchy 主值

$$\text{v. p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}\quad (v\bar{v}'=1)$$

是存在的, 并且等于

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)-f(v)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}+\frac{1}{2}f(v). \tag{1.3.1}$$

这里 Cauchy 主值的意义为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-v\bar{u}'|>\varepsilon}}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}.$$

证 先取 $v=(1, 0, \cdots, 0)$, 于是

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-\bar{u}_1|>\varepsilon}}\frac{f(u)}{(1-\bar{u}_1)^n}\dot{u}$$
$$=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-\bar{u}_1|>\varepsilon}}\frac{f(u)-f(1, 0, \cdots, 0)}{(1-\bar{u}_1)^n}\dot{u}$$
$$+\frac{f(1, 0, \cdots, 0)}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{uu'=1\\|1-u_1|>\varepsilon}}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}=I_1+I_2, \tag{1.3.2}$$

由于

$$|f(u)-f(1, 0, \cdots, 0)|=O[(2-u_1-\bar{u}_1)^{\frac{\alpha}{2}}]=O(|1-u_1|^{\frac{\alpha}{2}}),$$

因之

$$\left|\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-\bar{u}_1|>\varepsilon}}\frac{f(u)-f(1, 0, \cdots, 0)}{(1-\bar{u}_1)^n}\dot{u}\right|$$
$$\leqslant\frac{K}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-\bar{u}_1|>\varepsilon}}|1-\bar{u}_1|^{\frac{\alpha}{2}-n}\dot{u}$$
$$=\frac{K}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<1}\dot{v}\int_{|\theta|>\alpha}\frac{d\theta}{|1-r e^{i\theta}|^{n-\frac{\alpha}{2}}}, \tag{1.3.3}$$

此处令 $\bar{u}_1 = re^{i\theta}$, $u_2 = v_2$, $\cdots$, $u_n = v_n$, $v = (v_2, \cdots, v_n)$, K 为一正的常数,

$$a = \cos^{-1}\left(\frac{1+r^2-s^2}{2r}\right).$$

我们来考虑

$$\int_{|\theta|>a} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{n-\frac{\alpha}{2}}}. \tag{1.3.4}$$

先设 $n=2$, 于是由 Hölder 不等式,

$$\int_{|\theta|>a} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{2-\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \left(\int_{\theta|>a} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^2}\right)^{1-\frac{\alpha}{4}} \leqslant \left(\frac{2\pi}{1-r^2}\right)^{1-\frac{\alpha}{4}}.$$

因此当 $n=2$ 时,

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1|>s}} |1-\bar{u}_1|^{\frac{\alpha}{2}-n} \dot{u} \leqslant \frac{2\pi}{\omega_3} \int_{v\bar{v}'<1} \frac{\dot{v}}{(1-r^2)^{1-\frac{\alpha}{4}}}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_3} \int_{v\bar{v}'<1} \frac{\dot{v}}{(v\bar{v}')^{1-\frac{\alpha}{4}}}.$$

用球坐标, 此为

$$O\left(\int_0^1 \frac{sds}{s^{2-\frac{\alpha}{2}}}\right) = O(1),$$

所以我们得到, 当 $n=2$ 时,

$$\frac{1}{\omega_3} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1|>s}} |1-\bar{u}_1|^{\frac{\alpha}{2}-2} \dot{u} = O(1). \tag{1.3.5}$$

当 $n>2$ 时,

$$\int_{|\theta|>a} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{n-\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{n-\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\leqslant \frac{1}{(1-r)^{n-2-\frac{\alpha}{2}}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^2}$$

$$= \frac{2\pi}{(1-r)^{n-\frac{\alpha}{2}-1}(1+r)} = O\left(\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{n-\frac{\alpha}{2}-1}\right).$$

所以, 用球坐标,

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-\bar{u}_1|>\varepsilon}}|1-\bar{u}_1|^{\frac{\alpha}{2}-n}\dot{u}=O\left(\int_{v\bar{v}'<1}(1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}-n+1}\dot{v}\right)$$

$$=O\left(\int_0^1 s^{2n-3}\cdot s^{\alpha-2n+2}ds\right)=O\left(\int_0^1 s^{\alpha-1}ds\right)=O(1) \qquad (1.3.6)$$

因而 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_1$ 是一个通常积分，根据§1.2之结果，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-\bar{u}_1|>\varepsilon}}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}=\frac{1}{2}.$$

所以在(1.3.2)中令 $\varepsilon\to 0$，则当 $v=(1,0,\cdots,0)$ 时证明了(1.3.1).

对于一般的 v, $v\bar{v}'=1$, 一定存在酉方阵 U，使 $vU=(1,0,\cdots,0)$，故得定理 1.3.1.

§1.4 Cauchy 型积分的极限值

记 $\rho(z,v)=((z-v)\overline{(z-v)}')^{\frac{1}{2}}$, $z\bar{z}'<1$, $v\bar{v}'=1$. 并定义 $d(z,\mathscr{L})=\min\limits_{u\in\mathscr{L}}|1-z\bar{u}'|$，$\mathscr{L}$ 表示 $u\bar{u}'=1, z\bar{z}'<1$. 先来证明如下的

定理 1.4.1 设 $f(u)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$(在 $u\bar{u}'=1$ 上)，令 z 从 $z\bar{z}'<1$ 内趋于点 $v(v\bar{v}'=1)$，只要

$$\frac{\rho(z,v)}{d(z,\mathscr{L})}<M, \qquad (1.4.1)$$

M 为一常数，则必有

$$\lim_{z\to v}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)-f(v)}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}=\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)-f(v)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}. \qquad (1.4.2)$$

证 首先有

$$I=\int_{u\bar{u}'=1}\left(\frac{f(u)-f(v)}{(1-z\bar{u}')^n}-\frac{f(u)-f(v)}{(1-v\bar{u}')^n}\right)\dot{u}$$

$$=\int_{u\bar{u}'=1}\frac{[(1-v\bar{u}')^n-(1-z\bar{u}')^n](f(u)-f(v))}{(1-z\bar{u}')^n(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}$$

$$=\left(\int_{\sigma_\delta}+\int_{\Sigma_\delta}\right)\frac{[(1-v\bar{u}')^n-(1-z\bar{u}')^n](f(u)-f(v))}{(1-z\bar{u}')^n(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}$$

$$=I_1+I_2, \qquad (1.4.3)$$

此处 $\sigma_\delta: \begin{cases} u\bar{u}'=1, \\ |1-v\bar{u}'|<\delta, \end{cases} \quad \Sigma_\delta: \begin{cases} u\bar{u}'=1, \\ |1-v\bar{u}'|>\delta. \end{cases}$

但 $$|I_1| \leqslant \int_{\sigma_\delta} \frac{\left\{ \begin{array}{c} |(v-z)\bar{u}'|(|1-v\bar{u}'|^{n-1}+|1-v\bar{u}'|^{n-2} \\ \cdot|1-z\bar{u}'|+\cdots+|1-z\bar{u}'|^{n-1})\dot{u} \end{array} \right\}}{|1-z\bar{u}'|^n|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma_\delta} \frac{\rho(z, v)\dot{u}}{|1-z\bar{u}'|^k|1-v\bar{u}'|^{n-(k-1)-\frac{\alpha}{2}}}.$$

注意到 $|1-v\bar{u}'| \leqslant |1-z\bar{u}'|+|(z-v)\bar{u}'|$，而

$$|(z-v)\bar{u}'| \leqslant [(z-v)\overline{(z-v)}']^{\frac{1}{2}} < Md(z, \mathscr{L}) \leqslant M|1-z\bar{u}'|,$$

所以 $|1-v\bar{u}'| \leqslant (M+1)|1-z\bar{u}'|$，即

$$|1-z\bar{u}'| \geqslant \frac{1}{M+1}|1-v\bar{u}'|.$$

再由于 $$\frac{\rho(z, v)}{|1-z\bar{u}'|} \leqslant \frac{\rho(z, v)}{d(z, \mathscr{L})} < M,$$

于是

$$|I_1| \leqslant \sum_{k=1}^{n} M(M+1)^k \int_{\sigma_\delta} \frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} = M_1 \int_{\sigma_\delta} \frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}, \tag{1.4.4}$$

其中 $$M_1 = \sum_{k=1}^{n} M(M+1)^k.$$

由下面的引理 1.4.1 知

$$\int_{\sigma_\delta} \frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} = O(\delta^{\frac{\alpha}{2}}) \quad (\delta\to 0), \tag{1.4.5}$$

所以，对于任与的 $\varepsilon>0$，可取一 $\delta>0$，使在 σ_δ 上的积分 I_1 满足 $|I_1|<\frac{\varepsilon}{2}$. 在 δ 取定之后，由于

$$\int_{\Sigma_\delta} \frac{f(u)-f(v)}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}$$

作为 z 的函数，在 $z=v$ 连续，故当 $\rho(z, v)$ 充分小时，必有 $|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}$.

综上所述，当 $\rho(z, v)$ 充分小时，有 $|I|<\varepsilon$. 定理得证.

引理 1.4.1

$$\varphi(\delta)=\int_{\sigma_\delta}\frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}=O\left(\delta^{\frac{\alpha}{2}}\right)\quad(\delta\to 0),$$

其中
$$\sigma_\delta:\begin{cases}u\bar{u}'=1,\ v\bar{v}'=1,\ n\geqslant 2,\ 0<\alpha\leqslant 1.\\ |1-v\bar{u}'|\leqslant\delta,\end{cases}$$

证 因为存在酉方阵 U，使得 $v=(1,0,\cdots,0)U$，所以不妨假设

$$\varphi(\delta)=\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ |1-\bar{u}_1|<\delta}}\frac{\dot{u}}{|1-\bar{u}_1|^{n-\frac{\alpha}{2}}}.$$

记 $u_j=x_j+iy_j,\ j=1,2,\cdots,n$，并令

$$x_1=\cos\theta_1,\ y_1=\sin\theta_1\cos\theta_2,\ x_2=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\ \cdots,$$
$$y_n=\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-1},$$

其中 $0\leqslant\theta_1,\cdots,\theta_{2n-2}<\pi,\ 0\leqslant\theta_{2n-1}<2\pi$，则有

$$\dot{u}=\sin^{2n-2}\theta_1\sin^{2n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-2}d\theta_1d\theta_2\cdots d\theta_{2n-1},$$
$$|1-u_1|^2=(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2.$$

于是当 $\delta\to 0$ 时，

$$\varphi(\delta)=O\left(\iint_{\substack{0<\theta_1,\ \theta_2<\pi\\ (1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2<\delta^2}}\frac{\sin^{2n-2}\theta_1\sin^{2n-3}\theta_2\,d\theta_1d\theta_2}{[(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2]^{\frac{2n-\alpha}{4}}}\right).\tag{1.4.6}$$

注意到

$$\delta^2\geqslant(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2\geqslant(1-\cos\theta_1)^2=4\sin^4\frac{\theta_1}{2},$$

习知当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$，所以 $\delta^2\geqslant\frac{4}{\pi^4}\theta_1^4$，即

$$\theta_1\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2}}\delta^{\frac{1}{2}}<\pi\delta^{\frac{1}{2}}.$$

记 $(1-\cos\theta_1)^2=a,\ \sin^2\theta_1=b$，并令 $\cos\theta_2=t$，则

$$\varphi(\delta)=O\left(\int_0^{\pi\delta^{\frac{1}{2}}}d\theta_1\int_0^1\frac{b^{n-1}dt}{(a+bt^2)^{\frac{2n-\alpha}{4}}}\right)$$

$$=O\left(\int_0^{\pi\delta^{\frac{1}{2}}}\frac{b^{n-1}}{a^{\frac{2n-\alpha}{4}}}d\theta_1\int_0^1\frac{dt}{\left(1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,t\right)^2\right)^{\frac{2n-\alpha}{4}}}\right),$$

令 $\sqrt{\frac{b}{a}}\,t=\operatorname{tg}\psi$，便有

$$\varphi(\delta)=O\left(\int_0^{\pi\delta^{\frac{1}{2}}} b^{n-1-\frac{1}{2}}a^{-\frac{2n-\alpha-2}{4}}d\theta_1\int_0^{\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}}\cos^{\frac{2n-\alpha}{2}-2}\psi d\psi\right)$$

$$=O\left(\int_0^{\pi\delta^{\frac{1}{2}}}\frac{\sin^{2n-3}\theta_1 d\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^{\frac{2n-\alpha-2}{2}}}\right)$$

$$=O\left(\int_0^{\pi\delta^{\frac{1}{2}}}\theta_1^{2n-3-(2n-\alpha-2)}d\theta_1\right)=O(\delta^{\alpha/2}).$$ 证毕.

进而我们可以得到本节之主要结果:

定理 1.4.2 (Plemelj 公式)　若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lip α，则当 z 从 $z\bar{z}'<1$ 内部趋于 $v(v\bar{v}'=1)$ 时，只要保持

$$\frac{\rho(z,\ v)}{d(z,\ \mathscr{L})}<M\quad (M\ 为一常数),$$

就有

$$\lim_{z\to v}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}$$
$$=\text{v. p.}\ \frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}+\frac{1}{2}f(v). \tag{1.4.7}$$

证　首先可以写 Cauchy 型积分为

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}$$
$$=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)-f(v)}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}+\frac{f(v)}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}$$
$$=I_1+I_2. \tag{1.4.8}$$

由定理 1.4.1 及定理 1.3.1，有

$$\lim_{z\to v}I_1=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)-f(v)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}$$
$$=\text{v. p.}\ \frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}-\frac{1}{2}f(v). \tag{1.4.9}$$

再注意到　$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}=1,$$

便可立得公式(1.4.7)。

§1.5 Cauchy 型积分的极限函数的连续性质

更深入一步，我们有如下的

定理 1.5.1 若在 $u\bar{u}'=1$ 上 $f(u)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, 则由(1.4.7)式所示的极限函数

$$F(v)=\lim_{z\to v}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}$$

必属于 $\mathrm{Lip}(\alpha-\delta)$. 这里 $v\bar{v}'=1$, δ 为小于 α 的任意正数.

为了证明这一定理，我们首先证明

引理 1.5.1 设 $u=(u_1,\cdots,u_n)$，则

$$\psi(\varepsilon)=\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-\bar{u}_1|\geqslant\varepsilon}}\frac{\dot{u}}{|1-\bar{u}_1|^n}=O(\log\varepsilon),\qquad \varepsilon\to 0.\quad(1.5.1)$$

证 如同引理 1.4.1 的证法，对 $u\bar{u}'=1$ 的点采用球坐标表示，便有

$$\psi(\varepsilon)=O\Bigg(\iint_{\substack{0\leqslant\theta_1,\theta_2<\pi\\(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2\geqslant\varepsilon^2}}\frac{\sin^{2n-2}\theta_1\sin^{2n-3}\theta_2 d\theta_1 d\theta_2}{[(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2]^{n/2}}\Bigg).\tag{1.5.2}$$

因为当 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta_1<\pi$ 时, $(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2\geqslant 1$. 同时由于

$$\begin{aligned}\varepsilon^2&\leqslant(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2\\&\leqslant(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1=2(1-\cos\theta_1)\\&=4\sin^2\frac{\theta_1}{2}\leqslant\theta_1^2,\end{aligned}$$

所以若记 $(1-\cos\theta_1)^2=a$, $\sin^2\theta_1=b$, 并令 $\cos\theta_2=t$, 则

$$\psi(\varepsilon)=O(1)+O\Big(\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}b^{n-1}d\theta_1\int_0^1\frac{dt}{(a+bt^2)^{n/2}}\Big).$$

令 $\sqrt{\frac{b}{a}}t=\operatorname{tg}\phi$, 便有

$$\psi(\varepsilon)=O(1)+O\left(\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} b^{n-1-\frac{1}{2}} a^{-\frac{n-1}{2}} d\theta_1 \int_0^{\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}} \cos^{n-2}\phi d\phi\right)$$

$$=O(1)+O\left(\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n-3}\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^{n-1}} d\theta_1\right)$$

$$=O(1)+O\left(\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \theta_1^{-1} d\theta_1\right)=O(\log\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0.$$

引理得证.

现在来证明定理 1.5.1.

令

$$F_1(v)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)-f(v)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u}, \tag{1.5.3}$$

显然，只需证明 $F_1(v)$ 在点 $e_1=(1, 0, \cdots, 0)$ 属于 $\mathrm{Lip}(\alpha-\delta)$，其中 δ 为小于 α 的任一正数. 也就是对于任一点 v，$v\bar{v}'=1$，必有

$$|F_1(v)-F_1(e_1)|\leqslant M\rho^\alpha\log\rho, \tag{1.5.4}$$

其中 M 为一绝对常数，$\rho=\rho(v, e_1)=((v-e_1)\overline{(v-e_1)}')^{\frac{1}{2}}$.

必须指出，不妨设 $v=(v_1, v_*, 0, \cdots, 0)=e_1V$，其中

$$V=\begin{pmatrix} v_1, & v_* \\ -\bar{v}_*, & \bar{v}_1\end{pmatrix}\dot{+}I^{(n-2)}$$

为一酉方阵. 这是因为对于任一定点 $v=(v_1, \cdots, v_n)$，$v\bar{v}'=1$，必有酉方阵

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1\end{pmatrix},$$

使 $v=(v_1, v_*, 0, \cdots, 0)U$，所以可先作一变换 $u=\tilde{u}U$，相应地有 $v=\tilde{v}U$，$e_1=e_1U$，其中 $\tilde{v}=(v_1, v_*, 0, \cdots, 0)=e_1V$，$V$ 即如上所述.

由于

$$F_1(v)-F_1(e_1)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1} \frac{f(w)-f(v)}{(1-v\bar{w}')^n} \dot{w}$$

$$-\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)-f(e_1)}{(1-e_1\bar{u}')^n} \dot{u}$$

$$=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(uV)-f(e_1V)}{(1-e_1u')^n}\dot{u}$$
$$-\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)-f(e_1)}{(1-e_1\bar{u}_1')^n}\dot{u}.$$

于是

$$\begin{aligned}|F_1(v)-F_1(e_1)|\leqslant&\frac{1}{\omega_{2n-1}}\left|\int_\sigma\frac{f(uV)-f(e_1V)}{(1-e_1\bar{u}')^n}\dot{u}\right|\\&+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\left|\int_\sigma\frac{f(u)-f(e_1)}{(1-e_1\bar{u}')^n}\dot{u}\right|\\&+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\left|\int_\Sigma\frac{f(uV)-f(u)}{(1-e_1\bar{u}')^n}\dot{u}\right|\\&+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\left|\int_\Sigma\frac{f(e_1V)-f(e_1)}{(1-e_1\bar{u}')^n}\dot{u}\right|\\=&J_1+J_2+J_3+J_4,\end{aligned}\tag{1.5.5}$$

此处

$$\sigma:\begin{cases}u\bar{u}'=1,\\|1-e_1\bar{u}'|\leqslant\varepsilon,\end{cases}\qquad\Sigma:\begin{cases}u\bar{u}'=1,\\|1-e_1\bar{u}'|\geqslant\varepsilon,\end{cases}\qquad\varepsilon=\rho^2.\tag{1.5.6}$$

由引理 1.4.1, 可知

$$\begin{cases}J_1\leqslant M_1\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}=M_1\rho^\alpha,\\J_2\leqslant M_1\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}=M_1\rho^\alpha.\end{cases}\tag{1.5.7}$$

由引理 1.5.1, 可知

$$J_4\leqslant\frac{1}{\omega_{2n-1}}|f(e_1V)-f(e_1)|\int_\Sigma\frac{\dot{u}}{|1-e_1\bar{u}'|^n}\leqslant M_2\rho^\alpha\log\rho.\tag{1.5.8}$$

上面的 M_1, M_2 皆为绝对常数.

注意到

$$J_3\leqslant\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_\Sigma\frac{|f(uV)-f(u)|}{|1-e_1\bar{u}_1'|^n}\dot{u}$$
$$\leqslant\frac{M_3}{\omega_{2n-1}}\int_\Sigma\frac{((uV-u)(\overline{uV-u})')^{\frac{\alpha}{2}}}{|1-e_1\bar{u}'|^n}\dot{u},$$

由于　$(uV-u)(\overline{uV-u})'=u(2I-V-\bar{V}')\bar{u}'\leqslant2\mathrm{Re}(1-v_1)$,

而 $\rho=\rho(v, e_1)=(e_1(V-I)(\bar{V}'-I)e_1')^{\frac{1}{2}}=(2\mathrm{Re}(1-v_1))^{\frac{1}{2}}$,

所以

$$J_3 \leqslant \frac{M_3\rho^\alpha}{\omega_{2n-1}}\int_\Sigma \frac{\dot{u}}{|1-e_1\bar{u}_1'|^n} \leqslant M_4\rho^\alpha \log \rho. \tag{1.5.9}$$

上面的 M_3, M_4 亦皆为绝对常数.

取 $M=\max\{M_1, M_2, M_4\}$, 便有 (1.5.4). 定理证毕.

此外还要证明一个在第二章中用得到的

定理 1.5.2 若 $\varphi(w, u)$ 为定义在 $w\bar{w}'=1$, $u\bar{u}'=1$ 上的连续函数, 作为 w 的函数及作为 u 的函数都满足 Lipschitz 条件, 那末

$$\Phi(v, u)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\varphi(w, u)}{(1-v\bar{w}')^n}\dot{w}$$

作为 v 的函数及 u 的函数也都满足 Lipschitz 条件.

证 根据定理 1.5.1, 我们只需证明作为 u 的函数, $\Phi(v,u)=\psi(u)$ 是满足 Lipschitz 条件的. 若 $u_0\bar{u}_0'=1$, 则

$$\begin{aligned}\psi(u)-\psi(u_0)&=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\varphi(w, u)-\varphi(w, u_0)}{(1-v\bar{w}')^n}\dot{w}\\&=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{c}[\varphi(w, u)-\varphi(v, u)]\\-[\varphi(w, u_0)-\varphi(v, u_0)]\end{array}\right\}}{(1-v\bar{w}')^n}\\&\quad+[\varphi(v, u)-\varphi(v, u_0)]\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\dot{w}}{(1-v\bar{w}')^n}\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

令 $$\rho=\rho(u, u_0)=((u-u_0)(\overline{u-u_0})')^{\frac{1}{2}},$$

据假设, $\varphi(w, u)$ 作为 u 的函数属于 $\mathrm{Lip}\,\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$, 那末显然有

$$I_2=O(\rho^\alpha)\quad(\rho\to 0).$$

命 $$\Sigma:\begin{cases}w\bar{w}'=1,\\|1-v\bar{w}'|\geqslant\varepsilon,\end{cases}\qquad \sigma:\begin{cases}w\bar{w}'=1,\\|1-v\bar{w}'|\leqslant\varepsilon,\end{cases}$$

则 $$I_1=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\left(\int_\sigma+\int_\Sigma\right)=I_3+I_4,$$

显然我们有　$I_3=O\left(\int_\sigma \frac{\dot{w}}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}\right)=O(\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}})$，$\varepsilon\to 0$，

及

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_\Sigma \frac{\varphi(w,u)-\varphi(w,u_0)}{(1-v\bar{w}')^n}\dot{w} \\
&\quad -(\varphi(v,u)-\varphi(v,u_0))\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_\Sigma \frac{\dot{w}}{(1-v\bar{w}')^n} \\
&= I_5+I_6.
\end{aligned}
$$

容易看出

$$
I_5=O(\rho^\alpha\log\varepsilon),
$$

$$
I_6=O(\rho^\alpha).
$$

取 $\varepsilon=\rho^2$，则最后得到

$$
\psi(u)-\psi(u_0)=O\left(((u-u_0)(\overline{u-u_0})')^{\frac{\alpha}{2}}\log(u-u_0)(\overline{u-u_0})'\right),
$$

故对于任意小于 α 的正数 δ，有

$$
\psi(u)\in \mathrm{Lip}(\alpha-\delta).
$$

§1.6　定理 1.4.2 的推广

在这一节中，将 §1.2～§1.5 中的结果进行推广．前面我们定义 Cauchy 主值

$$
\text{v. p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}\quad (v\bar{v}'=1)
$$

为

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ |1-v\bar{u}'|>\varepsilon}}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}.
$$

在这一节中我们推广 Cauchy 主值的定义，命

$$
\text{v.p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}
$$

为

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ \alpha^2(1-\operatorname{Re} v\bar{u}')^2+\beta^2(\operatorname{Im} v\bar{u}')^2>\varepsilon^2}}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}\qquad(1.6.1)
$$

而 $\gamma=\alpha/\beta$．$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$．

将要证明：当 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lip p，则这样定义的 Cauchy 主值是存在的，且得到相应的 Plemelj 公式．特别当 $\alpha=\beta$ 时，就是 §1.3～§1.6 中所讨论的．

我们要证明如下的

引理 1.6.1

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\beta+\alpha}\right)^{n-1}, \qquad (1.6.2)$$

这里 $\sigma=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ \alpha^2(1-\operatorname{Re}\bar{u}_1)^2+\beta^2(\operatorname{Im}\bar{u}_1)^2>\varepsilon^2\}$，$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$\alpha+\beta\neq 0$．

定理 1.6.1 若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lip p，则 Cauchy 主值

$$\text{v. p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u} \qquad (v\bar{v}'=1)$$

是存在的，并且等于

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)-f(v)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}+\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\right)f(v), \quad (1.6.3)$$

这里 Cauchy 主值由(1.6.1)所定义．

定理 1.6.2(Plemelj 公式) 若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lip p，则当 z 从 $z\bar{z}'<1$ 内部趋于 $v(v\bar{v}'=1)$ 时，只要保持

$$\frac{\rho(z,\ v)}{d(z,\ \mathscr{L})}<M \qquad (M\text{ 为一常数}),$$

则有

$$\lim_{z\to v}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}$$

$$=\text{v. p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}f(v), \quad (1.6.4)$$

这里 Cauchy 主值由(1.6.1)所定义．

从这里，也显示出多复变数与单复变数的本质性的不同．在单复变数时，Cauchy 主值的定义只有一种，Plemelj 公式也只有一个，但在多复变数时，Cauchy 主值的定义不止一种，而 Plemelj 公式也不只一个．

在这里特别值得注意的是 $\beta=0$ 的情形，这时 Plemelj 公式成

为

$$\lim_{z\to v}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}$$

$$=\text{v. p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\infty)}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}. \qquad (1.6.5)$$

而 Cauchy 主值定义为

$$\text{v. p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\infty)}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ 1-\operatorname{Re}v\bar{u}'>\varepsilon}}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}. \qquad (1.6.6)$$

也就是：Cauchy 型积分的极限值等于一种奇异积分的 Cauchy 主值．当然这在单复变数时是不会发生的．

显然，上述这些结果的关键在于证明引理 1.6.1．有了引理 1.6.1，可参照 §1.3 的办法证明定理 1.6.1，再由定理 1.6.1 及定理 1.4.1 可得定理 1.6.2．所以我们在下一节中来证明引理 1.6.1，而略去定理 1.6.1 及定理 1.6.2 的证明．

§1.7 引理 1.6.1 的证明

先考虑 $\alpha>0$, $\beta>0$ 的情形．当 $\alpha=\beta$ 时，在 §1.2 中已经证明，故只讨论 $\alpha\neq\beta$ 的情形．

取 $0<\rho<1$．于是

$$1=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n}+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma'}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n}=I+I'.$$

这里 $\sigma'=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ \alpha^2(1-\operatorname{Re}\bar{u}_1)^2+\beta^2(\operatorname{Im}\bar{u}_1)^2\leqslant\varepsilon^2\}$．

先看 $I'=\dfrac{1}{\omega_{2n-1}}\displaystyle\int_{\sigma'}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n}$．命 $\bar{u}_1=re^{i\theta}$, $u_2=v_2,\cdots,u_n=v_n$, $v=(v_2,\cdots,v_n)$, $\alpha^2=t$, $\beta^2=1-t$ $(0<t<1$，这样做总是可以的，否则除以 $\alpha^2+\beta^2$，而令 $\varepsilon'^2=\varepsilon^2(\alpha^2+\beta^2)^{-1})$．由于 $\alpha\neq\beta$，故 $t\neq\dfrac{1}{2}$，于是 σ' 的点可化为

$$t(1-r\cos\theta)^2+(1-t)r^2\sin^2\theta\leqslant\varepsilon^2,\quad v\bar{v}'=1-r^2.$$

由此可得

$$\cos\theta\geqslant\frac{t-[(1-t)(t+r^2(1-2t))+(2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{r(2t-1)}.\qquad(1.7.1)$$

若命 $a=\cos^{-1}\dfrac{t-[(1-t)(t+r^2(1-2t))+(2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{r(2t-1)}$,

则 $-a\leqslant\theta\leqslant a$. 由(1.7.1)得

$$1\geqslant\frac{t-[(1-t)(t+r^2(1-2t))+(2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{r(2t-1)}.$$

由此不难算出 $1-r\leqslant\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{t}}$, 所以 $1-r^2\leqslant\dfrac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\dfrac{\varepsilon^2}{t}$. 于是得到

$$I'=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'\leqslant\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}}\dot{v}\int_{-a}^{a}\frac{d\theta}{(1-\rho re^{i\theta})^n}.$$

如同§1.2中(1.2.3)那样, I' 可写为

$$\frac{2}{\omega_{2n-1}}\operatorname{Im}\left\{\sum_{p=1}^{n-1}K_p+K_0\right\}+\frac{2a}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'\leqslant\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}}\dot{v},\quad(1.7.2)$$

这里

$$K_p=\int_{v\bar{v}'\leqslant\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}}\frac{\dot{v}}{p(1-\rho re^{ia})^p},$$

$$K_0=\int_{v\bar{v}'\leqslant\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}}\log\frac{1}{1-\rho re^{ia}}\,\dot{v}.$$

若记 $x=\dfrac{t-[(1-t)(t+r^2(1-2t))+(2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{r(2t-1)}$,

则当 $r\to1$ 时,

$$x-1=\frac{t-r(2t-1)-[(1-t)(t+r^2(1-2t))+(2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{r(2t-1)}$$
$$=O(\varepsilon^2).$$

于是 $a=\cos^{-1}x=\cos^{-1}1+O(x-1)=O(\varepsilon^2)$.

所以 $$\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'\leqslant\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}}a\dot{v}=O\left(\varepsilon^{\frac{2n-2}{2}+2}\right)=O(\varepsilon^{n+1}).$$

再看(1.7.2)的其它项. 命

$$Q=[(1-t)(t+r^2(1-2t))+(2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}},$$

则 $r\cos a=\dfrac{t-Q}{2t-1}$.

$$1-\cos^2 a=1-\frac{t^2-2tQ+Q^2}{r^2(2t-1)^2}$$

$$=\frac{r^2(2t-1)t-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt}{r^2(2t-1)^2},$$

所以　$$r\sin a=\frac{[r^2(2t-1)t-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt]^{\frac{1}{2}}}{|2t-1|^2}.$$

于是当 $p\geqslant 1$ 时,

$$K_p=\frac{1}{p}\int_{v\bar{v}'<\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}}\Big[1-\rho\frac{t-Q}{2t-1}$$

$$-i\rho\frac{[r^2(2t-1)t-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt]^{\frac{1}{2}}}{|2t-1|}\Big]^{-p}\dot{v}.$$

命 $v=(x_1, x_2, \cdots, x_{2n-2})$. 用球坐标,

$x_1=s\cos\varphi_1, x_2=s\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \cdots, x_{2n-2}=s\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-3}$.

于是　$\dot{v}=s^{2n-3}\sin^{2n-4}\varphi_1\sin^{2n-5}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-4}ds\,d\varphi_1\cdots d\varphi_{2n-3}$.

注意到 $r^2=1-v\bar{v}'$, 这就得到

$$K_p=\frac{2\pi^{n-1}}{p\Gamma(n-1)}\int_0^{\left[\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}\right]^{\frac{1}{2}}}\Big[1-\rho\frac{t-Q}{2t-1}$$

$$-i\rho\frac{[t(1-s^2)(2t-1)-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt]^{\frac{1}{2}}}{|2t-1|}\Big]^{-p}s^{2n-3}ds.$$

被积函数的绝对值为

$$\Big[\Big(1-\rho\frac{t-Q}{2t-1}\Big)^2$$

$$+\rho^2\frac{t(1-s^2)(2t-1)-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt}{(2t-1)^2}\Big]^{\frac{-p}{2}}s^{2n-3},$$

当 $\rho\to 1$ 时, 上式极限为

$$\frac{|2t-1|^p s^{2n-3}}{[(t+Q-1)^2+t(1-s^2)(2t-1)-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt]^{p/2}}.$$

可以证明：存在正数 η, δ；当 $s\in\left[0,\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, $\varepsilon\in(0,\ \delta)$ 时，有不等式

$$(t+Q-1)^2+t(1-s^2)(2t-1)-t-(2t-1)s^2+2Qt>\eta\varepsilon^2. \tag{1.7.3}$$

这是容易证明的．经过计算，上式左端即为

$$(2t-1)[2(t+Q-1)-(2t-1)s^2].$$

先设 $t>\frac{1}{2}$，要证存在 $\eta_0>0$，当 ε 充分小时有

$$2(t+Q-1)-(2t-1)s^2>\eta_0\varepsilon^2.$$

这只要取 $\eta_0<4(1-t)(2t-1)$ 即可．

当 $t<\frac{1}{2}$ 时，要证存在 $\eta_0>0$，当 ε 充分小时有

$$2(t+Q-1)-(2t-1)s^2<\eta_0\varepsilon^2.$$

这只要取 $\eta_0<2\left[\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}\right]^{-1}$ 即可．

故不论 $t>\frac{1}{2}$ 或 $t<\frac{1}{2}$，(1.7.3)成立．于是

$$J_p=\lim_{\rho\to1}K_p=O(\varepsilon^{-p})\int_0^{\left[\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}\right]^{\frac{1}{2}}}s^{2n-3}ds=O(\varepsilon^{n-p-1}).$$

故当 $p<n-1$ 时，$\lim\limits_{\varepsilon\to0}J_p=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\lim\limits_{\rho\to1}K_p=0$.

计算 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\lim\limits_{\rho\to1}K_{n-1}=J_{n-1}$，由 Lebesgue 定理，

$$J_{n-1}=\frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}}}\left[\frac{t+Q-1}{2t-1}-i\frac{[t(2t-1)(1-s^2)-t-(2t-1)s^2+2Qt]^{\frac{1}{2}}}{|2t-1|}\right]^{-(n-1)}\cdot s^{2n-3}ds,$$

记 $\eta=\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$, $s=\eta R$，则

$$J_{n-1}=\frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1\left[\frac{t+Q-1}{2t-1}\right.$$

$$\left.-i\,\frac{[t(2t-1)(1-\eta^2R^2)-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt]^{\frac{1}{2}}}{|2t-1|}\right]^{-(n-1)}$$

$$\cdot\eta^{2n-2}R^{2n-3}dR.$$

由于

$$\eta^{-2}\frac{t-1+Q}{2t-1}$$

$$=\eta^{-2}\frac{t-1+[(1-t)^2+(2t-1)(1-t)\eta^2R^2+(2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{2t-1}$$

$$=\frac{R^2}{2}+O(\varepsilon).$$

以及 $$\frac{1}{\eta^2(2t-1)}\{t(2t-1)(1-\eta^2R^2)-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{t}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon}{t}\right)^2}-\frac{R^4}{2}+O(\varepsilon)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}(1-R^4)^{\frac{1}{2}}+O(\varepsilon).$$

因此可得 $$\lim_{\varepsilon\to0}J_{n-1}=\frac{2^n\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^1\frac{R^{2n-3}dR}{\left[R^2-i\left(\frac{t}{1-t}\right)\sqrt{1-R^4}\right]^{n-1}}.$$

命 $R^2=u$, $\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}=b$, 则上式为

$$\frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^1\frac{u^{n-2}du}{(u-ib\sqrt{1-u^2})^{n-1}}.$$

命 $u=\cos\theta$, 则

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_{n-1}=\frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{n-2}\theta\sin\theta d\theta}{(\cos\theta-ib\sin\theta)^{n-1}}$$

$$=\frac{(2\pi)^{n-1}}{i\Gamma(n)(1+b)^{n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(e^{2i\theta}+1)^{n-2}(e^{2i\theta}-1)d\theta}{\left(1+\frac{1-b}{1+b}e^{2i\theta}\right)^{n-1}},$$

由于 $b>0$, $-1<\frac{1-b}{1+b}<1$, 将被积函数展开, 然后积分得

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_{n-1}=\frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)}\left\{\frac{-1}{2(1+b)^{n-1}}\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q C_{n-2}^p C_{n+q-2}^q\right.$$

$$\cdot\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^q\left[\frac{1}{p+q+1}((-1)^{p+q+1}-1)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{p+q}((-1)^{p+q}-1)\right]$$

$$\left.-\frac{1}{i(1+b)^{n-1}}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{(1+b)^{n-1}}\right\},$$

因之
$$\operatorname{Im}(\lim_{\varepsilon\to0}J_{n-1})=\lim_{\varepsilon\to0}(\operatorname{Im}J_{n-1})$$

$$=\frac{\pi^n}{(n-1)!}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+b}\right)^{n-1}.$$

最后计算 K_0,

$$K_0=\int_{v\bar v'<\frac{2\varepsilon}{\sqrt t}-\frac{\varepsilon^2}{t}}\log\frac{1}{1-\rho re^{i\theta}}\dot v,$$

$$J_0=\lim_{\rho\to1}K_0=\int_{v\bar v'<\frac{2\varepsilon}{\sqrt t}-\frac{\varepsilon^2}{t}}\log\frac{1}{1-re^{i\theta}}\dot v$$

$$=\frac{-2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\sqrt t}-\frac{\varepsilon^2}{t}}}s^{2n-3}\log(1-re^{i\theta})ds.$$

由于 $\operatorname{Im}\log(1-re^{i\theta})=O(1)$. 故 $\operatorname{Im}J_0=O(\varepsilon^{n-1})$. 综合上述, 得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\rho\to1}I'=\frac{2}{\omega_{n-1}}\frac{\pi^n}{(n-1)!}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+b}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+b}\right)^{n-1}.$$

由于 $b=\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac12}=\frac{\alpha}{\beta}$, 故当 $\alpha>0$, $\beta>0$ 时引理 1.6.1 得证.

当 $\alpha>0$, $\beta=0$ 时, 引理 1.6.1 成为

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_1}\frac{\dot u}{(1-\bar u_1)^n}=1,\qquad(1.7.4)$$

这里 $\sigma_1=\{u\,|\,u\bar u'=1,\ \operatorname{Re}(1-\bar u_1)>\varepsilon\}$.

现在来证明(1.7.4). 与证明 $\beta>0$ 时情形一样, 取 $0<\rho<1$. 有

$$1=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_1}\frac{\dot u}{(1-\rho\bar u_1)^n}+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_1'}\frac{\dot u}{(1-\rho\bar u_1)^n}=I_1+I_1',$$

这里 $\sigma_1'=\{u\,|\,u\bar u'=1,\ \operatorname{Re}(1-\bar u_1)\leqslant\varepsilon\}$.

类似于(1.7.2), 我们有

$$I_1' = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im}\left\{\sum_{p=1}^{n-1} K_p + K_0\right\} + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' \leqslant 2\varepsilon-\varepsilon^2} a\dot{v},$$

这里
$$K_p = \int_{v\bar{v}' \leqslant 2\varepsilon-\varepsilon^2} \frac{\dot{v}}{p(1-\rho r e^{i\alpha})^p},$$

$$K_0 = \int_{v\bar{v}' \leqslant 2\varepsilon-\varepsilon^2} \log \frac{1}{(1-\rho r e^{i\alpha})} \dot{v},$$

而
$$a = \cos^{-1} \frac{1-\varepsilon}{r}.$$

如同上面 $\beta>0$ 的情形的证明一样，可证

$$\int_{v\bar{v}' \leqslant 2\varepsilon-\varepsilon^2} a\dot{v} = o(1), \quad J_p = O(\varepsilon^{n-p-1}), \quad J_0 = o(1)$$

都成立，唯一要算的是 J_{n-1}，此时

$$J_{n-1} = \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{(\varepsilon - i\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2-s^2})^{n-1}}.$$

记 $\eta = \sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}$, $s=\eta R$, 则

$$J_{n-1} = \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!} \eta^{2n-2} \int_0^1 \frac{R^{2n-3} dR}{(\varepsilon - i\eta\sqrt{1-R^2})^{n-1}}$$
$$= \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{2\varepsilon-\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)^{n-1} \int_0^1 \frac{R^{2n-3} dR}{\left(1 - i\frac{\eta}{\varepsilon}\sqrt{1-R^2}\right)^{n-1}}.$$

被积函数分母的绝对值为

$$\left[1+\frac{\eta^2}{\varepsilon^2}(1-R^2)\right]^{\frac{n-1}{2}} = \left[1+\frac{2\varepsilon-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}(1-R^2)\right]^{\frac{n-1}{2}} \geqslant 1,$$

且当 $\varepsilon \to 0$ 时，是趋于无穷的．故由 Lebesgue 定理，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_{n-1} = 0,$$

故 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_1' = 0$．所以引理 1.6.1 当 $\alpha>0$, $\beta=0$ 时也是成立的．

最后证明当 $\alpha=0$, $\beta>0$ 时引理 1.6.1 也成立．这时引理 1.6.1 成为

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_2} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n} = 1 - 2^{n-2}, \tag{1.7.5}$$

这里 $\sigma_2 = \{u \mid u\bar{u}'=1, \ |\operatorname{Im} \bar{u}_1| > \varepsilon\}$.

如同以前一样，命 $\bar{u}_1=re^{i\theta}$, $u_2=v_2$, $\cdots$, $u_n=v_n$, 记 $v=(v_2,\cdots,v_n)$. 于是 σ_2 为 $v\bar{v}'=1-r^2$, $|\sin\theta|>\frac{\varepsilon}{r}$. 记 $a=\sin^{-1}\frac{\varepsilon}{r}$, 则 θ 的变化范围是 $a<\theta<\pi-a$, $-(\pi-a)<\theta<-a$. 又因 $\frac{\varepsilon}{r}<|\sin\theta|\leqslant 1$, 所以 $v\bar{v}'\leqslant 1-\varepsilon^2$. 故得

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_2}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}$$

$$=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<1-\varepsilon^2}\dot{v}\left\{\int_{-\pi+a}^{-a}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}+\int_a^{\pi-a}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}\right\}.$$

与前面所做的一样可证

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_2}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\operatorname{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}J_k-\sum_{k=1}^{n-1}H_k+J_0-H_0\right\}$$

$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<1-\varepsilon^2}(\pi-2a)\dot{v},\quad(1.7.6)$$

其中

$$J_k=\int_{v\bar{v}'<1-\varepsilon^2}\frac{\dot{v}}{k(1+re^{-ia})^k},\quad J_0=\int_{v\bar{v}'<1-\varepsilon^2}\ln\frac{1}{1+re^{-ia}}\dot{v},$$

$$H_k=\int_{v\bar{v}'<1-\varepsilon^2}\frac{\dot{v}}{k(1-re^{ia})^k},\quad H_0=\int_{v\bar{v}'<1-\varepsilon^2}\ln\frac{1}{1-re^{ia}}\dot{v}.$$

先算(1.7.6)的最后一个积分. 命 $v=(x_1,x_2,\cdots,x_{2n-2})$, 用球坐标

$$x_1=s\cos\varphi_1,\ x_2=s\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\ \cdots,$$

$$x_{2n-2}=s\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-3},$$

$$\dot{v}=s^{2n-3}\sin^{2n-4}\varphi_1\sin^{2n-5}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-4}\,ds\,d\varphi_1\cdots d\varphi_{2n-3},$$

于是

$$\int_{v\bar{v}'<1-\varepsilon^2}a\dot{v}=\int_{v\bar{v}'<1-\varepsilon^2}\sin^{-1}\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-v\bar{v}'}}\dot{v}$$

$$=\int_0^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}s^{2n-3}\sin^{-1}\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-s^2}}ds$$

$$=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}(\sqrt{1-\varepsilon^2})^{2n-2}$$

$$\cdot\int_0^1 t^{2n-3}\sin^{-1}\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-(1-\varepsilon^2)t^2}}dt.$$

由于被积函数有界，故

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{v\bar{v}'<1-\varepsilon^2} a\dot{v}=0.$$

从而有
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<1-\varepsilon^2}(\pi-2a)\dot{v}=1.$$

再算
$$J_k=\frac{1}{k}\int_{v\bar{v}'<1-\varepsilon^2}\frac{\dot{v}}{(1+re^{-ia})^k},$$

由于
$$1+re^{-ia}=1+\sqrt{1-v\bar{v}'-\varepsilon^2}-i\varepsilon,$$

用球坐标得
$$J_k=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\int_0^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{s^{2n-3}ds}{(1+\sqrt{1-s^2-\varepsilon^2}-i\varepsilon)^k}.$$

命 $\eta=\sqrt{1-\varepsilon^2}$，$s=\eta t$，则

$$J_k=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\eta^{2n-2}\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{(1+\eta\sqrt{1-t^2}-i\sqrt{1-\eta^2})^k}.$$

由 Lebesgue 定理，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_k=\lim_{\eta\to 1}J_k=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{(1+\sqrt{1-t^2})^k}=\text{实数},$$

所以
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}J_k=0.$$

对 J_0 也用球坐标，得

$$J_0=-\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\eta^{2n-2}\int_0^1 t^{2n-3}\log(1+\eta\sqrt{1-t^2}-i\sqrt{1-\eta^2})dt,$$

$$\operatorname{Im}J_0=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\eta^{2n-2}\int_0^1 t^{2n-3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1+\eta\sqrt{1-t^2}}dt.$$

于是
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}(J_0)=0.$$

同样可证
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}(H_0)=0.$$

与计算 J_k 一样，H_k 可写成

$$H_k=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\eta^{2n-2}\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{(1-\eta\sqrt{1-t^2}-i\sqrt{1-\eta^2})^k}.$$

被积函数的绝对值为

$$\frac{t^{2n-3}}{[(1-\eta\sqrt{1-t^2})^2+(1-\eta^2)]^{k/2}}\leqslant\frac{t^{2n-3}}{(1-\sqrt{1-t^2})^k},$$

当 $k<n-1$ 时，

$$\int_0^1\frac{t^{2n-3}}{(1-\sqrt{1-t^2})^k}$$

收敛，极限可与积分交换，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}H_k=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{(1-\sqrt{1-t^2})^k}=\text{实数},$$

所以，当 $k<n-1$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}(H_k)=0.$$

最后计算 H_{n-1}.

$$H_{n-1}=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\eta^{2n-2}\int_0^1\frac{t^{2n-3}(1-\eta\sqrt{1-t^2}+i\sqrt{1-\eta^2})^{n-1}}{[(1-\eta\sqrt{1-t^2})^2+(1-\eta^2)]^{n-1}}dt.$$

由于 $\operatorname{Im}(1-\eta\sqrt{1-t^2}+i\sqrt{1-\eta^2})^{n-1}$

$$=\sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-1)^pC_{n-1}^{2p+1}(\sqrt{1-\eta^2})^{2p+1}(1-\eta\sqrt{1-t^2})^{n-2p-2}.$$

所以
$$\operatorname{Im}(H_{n-1})=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\eta^{2n-2}\sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-1)^pC_{n-1}^{2p+1}K_p,$$

其中
$$K_p=(\sqrt{1-\eta^2})^{2p+1}\int_0^1\frac{t^{2n-3}(1-\eta\sqrt{1-t^2})^{n-2p-2}dt}{[(1-\eta\sqrt{1-t^2})^2+(1-\eta^2)]^{n-1}}.$$

作变换 $1-\eta\sqrt{1-t^2}=u$,

$$K_p=(\sqrt{1-\eta^2})^{2p+1}\frac{1}{\eta^{2n-2}}\int_{1-\eta}^1\frac{[\eta^2-(1-u)^2]^{n-2}}{[u^2+(1-\eta^2)]^{n-1}}\cdot u^{n-2p-2}(1-u)du,$$

但
$$\frac{[\eta^2-(1-u)^2]^{n-2}}{[u^2+(1-\eta^2)]^{n-1}}=\frac{1}{u^2+1-\eta^2}\left(\frac{2u}{u^2+1-\eta^2}-1\right)^{n-2}$$

$$=\sum_{q=0}^{n-2}(-1)^{n-q-2}C_{n-2}^q2^q\frac{u^q}{(u^2+1-\eta^2)^{q+1}}.$$

于是
$$K_p=\frac{1}{\eta^{2n-2}}\sum_{q=0}^{n-2}(-1)^{n-q-2}C_{n-2}^q2^q(L_q-M_q),$$

其中
$$L_q=(\sqrt{1-\eta^2})^{2p+1}\int_{1-\eta}^{1}\frac{u^{n+q-2p-2}}{(u^2+1-\eta^2)^{q+1}}du,$$
$$M_q=(\sqrt{1-\eta^2})^{2p+1}\int_{1-\eta}^{1}\frac{u^{n+q-2p-1}}{(u^2+1-\eta^2)^{q+1}}du.$$

对 L_q 作变换 $u=\sqrt{1-\eta^2}x$, 有
$$L_q=(\sqrt{1-\eta^2})^{n-q-2}\left\{\int_{\sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}}^{1}\frac{x^{n+q-2p-2}}{(1+x^2)^{q+1}}dx\right.$$
$$\left.+\int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}}\frac{x^{n+q-2p-2}}{(1+x^2)^{q+1}}dx\right\}=Q_1+Q_2.$$

由于 $0\leqslant q\leqslant n-2$, $0\leqslant 2p\leqslant n-2$, 所以 $n+q-2p-2\geqslant 0$. 故有
$$Q_1=O((\sqrt{1-\eta^2})^{n-q-2}),\quad (\eta\to 1).$$

故当 $0\leqslant q<n-2$ 时, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}Q_1=0$ 对任意 $0\leqslant p\leqslant\frac{n-2}{2}$ 成立.

$$Q_2=(\sqrt{1-\eta^2})^{n-q-2}\int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}}\frac{x^{n+q-2p-2}}{(1+x^2)^{q+1}}dx$$
$$\leqslant(\sqrt{1-\eta^2})^{n-q-2}\int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}}x^{n-q-4}dx.$$

当 $0\leqslant q<n-3$ 时,
$$Q_2\leqslant\frac{1}{n-q-3}[\sqrt{1-\eta^2}-(\sqrt{1-\eta^2})^{n-q-2}]\to 0,\quad (\eta\to 1).$$

当 $q=n-3$ 时,
$$Q_2\leqslant\sqrt{1-\eta^2}\int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}}\frac{dx}{x}=\sqrt{1-\eta^2}\log\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\to 0,\quad (\eta\to 1).$$

综上所述, 当 $0\leqslant q<n-2$ 时, $\lim\limits_{\eta\to 1}L_q=0$. 用同样方法可以证明, 当 $0\leqslant q\leqslant n-2$ 时, $\lim\limits_{\eta\to 1}M_q=0$. 于是
$$\lim_{\eta\to 1}K_p=2^{n-1}\lim_{\eta\to 1}L_{n-2}=2^{n-2}\int_0^{\infty}\frac{x^{2n-2p-4}}{(1+x^2)^{n-1}}dx$$
$$=2^{n-3}\int_0^{\infty}\frac{t^{n-p-\frac{5}{2}}}{(1+t)^{n-1}}dt=2^{n-3}B\left(n-p-\frac{3}{2},p+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-p-\frac{3}{2}\right)2^{n-3}/\Gamma(n-1).$$

这就得到 $\lim\limits_{\eta\to 1}\mathrm{Im}(H_{n-1})$

$$=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-1)^p C_{n-1}^{2p+1}2^{n-3}\ \frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-p-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n-1)}.$$

但是

$$\sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-1)^p C_{n-1}^{2p+1}B\left(n-p-\frac{3}{2},\ p+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-1)^p C_n^{2p+1}\int_0^\infty\frac{t^{n-p-\frac{5}{2}}}{(1+t)^{n-1}}dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{t^{n-3}}{(1+t)^{n-1}}\left\{\sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-1)^p C_n^{2p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{2p+1}\right\}dt$$

$$=\int_0^\infty\frac{t^{n-2}}{(1+t)^{n-1}}\left\{\mathrm{Im}\left(1+\frac{i}{\sqrt{t}}\right)^{n-1}\right\}dt$$

$$=\mathrm{Im}\left(\int_0^\infty\frac{t^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}dt}{(\sqrt{t}-i)^n}\right)$$

$$=2\mathrm{Im}\left(\int_0^\infty\frac{x^{n-2}dx}{(x-i)^{n-1}}\right).$$

用分部积分法，可得

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{x^{n-1}dx}{(x-i)^n}=\pi i,$$

但

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{x^{n-1}dx}{(x-i)^n}=\int_0^\infty\left\{\frac{x^{n-1}}{(x-i)^n}-\frac{x^{n-1}}{(x+i)^n}\right\}dx$$

$$=2i\mathrm{Im}\left(\int_0^\infty\frac{x^{n-1}dx}{(x-i)^n}\right).$$

所以

$$2\mathrm{Im}\left(\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{(x-i)^n}dx\right)=\pi.$$

因之

$$\lim_{\eta\to 1}\mathrm{Im}(H_{n-1})=\frac{2^{n-2}\pi^n}{\Gamma(n)}.$$

综合以上所述，就得到(1.7.5)。

因之，引理 1.6.1 不论当 $\alpha>0,\ \beta>0;\alpha>0,\ \beta=0$ 或 $\alpha=0,\ \beta>0$ 时都成立。

§1.8 另一种 Cauchy 主值

在§1.6中我们推广了 Cauchy 主值的定义，命

$$\text{v. p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}$$

为
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ \alpha^2(1-\operatorname{Re}v\bar{u}')^2+\beta^2(\operatorname{Im}v\bar{u}')^2\geqslant\varepsilon^2}}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u},$$

而 $\gamma=\alpha/\beta$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$.

并且证明：当 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lip$p$ 时，则这样定义的 Cauchy 主值是存在的，且得到相应的 Plemelj 公式.

在本节中，我们将给出另一种 Cauchy 主值的定义.

若 $\alpha>0$, $\beta>0$,

$$D(v,\varepsilon)=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ 1-\operatorname{Re}v\bar{u}'<\alpha\varepsilon,\ |\operatorname{Im}v\bar{u}'|<\beta\varepsilon\},\tag{1.8.1}$$

而 $D^*(v,\varepsilon)$ 为 $D(v,\varepsilon)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上的余集,

$$B=\frac{2^{n-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}}\cos^{n-2}t\,\frac{\sin(n-1)t}{\sin t}\,dt\right\}.\tag{1.8.2}$$

我们要证明如下的

引理 1.8.1

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{D^*(v,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}=1-B,\tag{1.8.3}$$

这里 $D^*(v,\varepsilon)$, B 由(1.8.1)及(1.8.2)所定义.

定理 1.8.1 若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lip$p$，则 Cauchy 主值

$$\text{v. p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(B)}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}\quad(v\bar{v}'=1)$$

是存在的，并且等于

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)-f(v)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}+(1-B)f(v).$$

这里 Cauchy 主值定义为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{D^*(v,\varepsilon)}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}. \tag{1.8.4}$$

定理 1.8.2(Plemelj 公式)　若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lip p $(0<p\leqslant 1)$，则当 z 从 $z\bar{z}'<1$ 内部趋于 $v(v\bar{v}'=1)$ 时，只要保持

$$\frac{\rho(z,\ v)}{d(z,\ \mathscr{L})}<M\quad (M\text{为一常数}),$$

则有

$$\lim_{z\to v}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}$$

$$=\text{v.p.}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(B)}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}+Bf(v). \tag{1.8.5}$$

这里 Cauchy 主值由(1.8.3)所定义.

特别当 $\beta=\infty$ 时，$B=0$，这时(1.8.5)就成为(1.6.5). 而 Cauchy 主值(1.8.3)的定义也与(1.6.6)一致.

同样，上述这些结果的关键在于证明引理 1.8.1. 有了引理 1.8.1，可参照 §1.3 的办法证明定理 1.8.1. 再由定理 1.8.1 及定理 1.4.1 可得定理 1.8.2，所以我们在下一节中来证明引理 1.8.1 而略去定理 1.8.1 及定理 1.8.2 的证明.

§1.9　引理 1.8.1 的证明

要证(1.8.3)，即要证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{D(v,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}=B \tag{1.9.1}$$

而
$$\begin{aligned}D(v,\ \varepsilon)=&\{u|u\bar{u}'=1,\ 1-\operatorname{Re}v\bar{u}'<\alpha\varepsilon\}\\&+\{u|u\bar{u}'=1,\ |\operatorname{Im}v\bar{u}'|<\beta\varepsilon\}-\{u|u\bar{u}'=1\}\\&+\{u|u\bar{u}'=1,\ 1-\operatorname{Re}v\bar{u}'>\alpha\varepsilon,\ |\operatorname{Im}v\bar{u}'|>\beta\varepsilon\}.\end{aligned}$$

由 §1.7，已知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\1-\operatorname{Re}u_1<\alpha\varepsilon}}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}=0, \tag{1.9.2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|\operatorname{Im}u_1|<\beta\varepsilon}}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}=2^{n-2},\tag{1.9.3}$$

所以要证的是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\1-\operatorname{Re}u_1>\alpha\varepsilon,\ |\operatorname{Im}u_1|>\beta\varepsilon}}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}$$
$$=1-\frac{2^{n-1}}{\pi}\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}}\cos^{n-2}t\,\frac{\sin(n-1)t}{\sin t}\,dt.\tag{1.9.4}$$

当 $\beta=0$ 时，(1.9.4) 即为 (1.9.2)．当 $\alpha=0$ 时，可以证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}t\,\frac{\sin(n-1)t}{\sin t}\,dt=\frac{\pi}{2}\text{（见第六章 §6.5）},$$

此即 (1.9.3)，所以只要证明 $\alpha>0$, $\beta>0$ 的情形，(1.9.4) 成立。

如以前那样，令 $\bar{u}_1=re^{i\theta}$, $(u_2,\cdots,u_n)=(v_1,\cdots,v_{n-1})$，于是当 $u\bar{u}'=1$, $1-\operatorname{Re}u_1>\alpha\varepsilon$, $|\operatorname{Im}u_1|>\beta\varepsilon$ 时，v, θ 的变化范围为

$$v\bar{v}'<2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2,\ -(\pi-b)<\theta<-a,\ a<\theta<\pi-b;$$
$$2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2\leqslant v\bar{v}'<1-\beta^2\varepsilon^2,$$
$$-(\pi-b)<\theta<-b,\ b<\theta<\pi-b,$$

这里
$$a=\cos^{-1}\frac{1-\alpha\varepsilon}{r},\quad b=\sin\frac{\beta\varepsilon}{r}.$$

因之，

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\1-\operatorname{Re}u_1>\alpha\varepsilon,\ |\operatorname{Im}u_1|>\beta\varepsilon}}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}$$
$$=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}\dot{v}\left(\int_{-(\pi-b)}^{-a}+\int_a^{\pi-b}\right)\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}$$
$$+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2\leqslant v\bar{v}'<1-\beta^2\varepsilon^2}\dot{v}\left(\int_{-(\pi-b)}^{-b}+\int_b^{\pi-b}\right)\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}$$
$$=I_1+I_2.$$

由于
$$\int_{-(\pi-b)}^{-a}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}+\int_a^{\pi-b}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}$$
$$=2\operatorname{Im}(B_1-B_2)+2(\pi-a-b),$$

而
$$B_1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1+re^{-ib})^k}-\log(1+re^{-ib}),$$

$$B_2=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1-re^{ia})^k}-\log(1-re^{ia}).$$

于是 I_1 等于

$$\frac{2}{\omega_{2n-1}}\operatorname{Im}\int_{v\bar v'<2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}(B_1-B_2)\dot v$$
$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar v'<2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}(\pi-a-b)\dot v$$
$$=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\operatorname{Im}\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1}J_k-J_0\right)-\left(\sum_{k=1}^{n-1}K_k-K_0\right)\right]$$
$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar v'<2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}(\pi-a-b)\dot v.$$

其中 $$J_0=\int_{v\bar v'<2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}\log(1+re^{-ib})\dot v,$$

$$J_k=\frac{1}{k}\int_{v\bar v'<2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}\frac{\dot v}{(1+re^{-ib})^k},\quad k=1,\ \cdots,\ n-1,$$

$$K_0=\int_{v\bar v'<2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}\log(1-re^{ia})\dot v,$$

$$K_k=\frac{1}{k}\int_{v\bar v'<2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}\frac{\dot v}{(1-re^{ia})^k},\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

先算 J_k. 由于 $1+re^{-ib}=1+\sqrt{r^2-\beta^2\varepsilon^2}-i\beta\varepsilon$, 用球坐标, 得出

$$J_k=\frac{1}{k}\,\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^{\sqrt{2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}}\frac{s^{2n-3}ds}{(1+\sqrt{r^2-\beta^2\varepsilon^2}-i\beta\varepsilon)^k}.$$

由于被积函数不超过 s^{2n-3}, 故有 $J_k=O(\varepsilon^{n-1})$. 而

$$J_0=\int_{v\bar v'<2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}\log(1+re^{-ib})\dot v$$

$$=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^{\sqrt{2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}}s^{2n-3}\log(1+\sqrt{r^2-\beta^2\varepsilon^2}-i\beta\varepsilon)ds,$$

所以

$$\operatorname{Im}J_0=O(\varepsilon^{n-1}).$$

再算 K_k 和 K_0, 由于

$$1-re^{ia}-\alpha\varepsilon-i\sqrt{r^2-(1-\alpha\varepsilon)^2},$$

故 $\operatorname{Im}K_0=O(\varepsilon^{n-1})$.

$$K_k=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\int_0^{\sqrt{2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}}\frac{s^{2n-3}ds}{[\alpha\varepsilon-i\sqrt{1-s^2-(1-\alpha\varepsilon)^2}]^k}.$$

由于

$$\left|\frac{s^{2n-3}}{(\alpha\varepsilon-i\sqrt{1-s^2-(1-\alpha\varepsilon)^2})^k}\right|\leqslant\frac{(\sqrt{2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2})^{2n-3}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{k}{2}}\varepsilon^k},$$

故 $K_k=O(\varepsilon^{n-k-1})$，而

$$K_{n-1}=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^{\sqrt{2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}}\frac{s^{2n-3}ds}{[\alpha\varepsilon-i\sqrt{1-s^2-(1-\alpha\varepsilon)^2}]^{n-1}}.$$

记 $\eta=\sqrt{2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}$, $s=\eta R$，则

$$\begin{aligned}K_{n-1}&=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\eta^{2n-2}\int_0^1\frac{R^{2n-3}dR}{[\alpha\varepsilon-i\sqrt{1-\eta^2R^2-(1-\alpha\varepsilon)^2}]^{n-1}}\\&=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\left(\frac{\eta^2}{\alpha\varepsilon}\right)^{n-1}\int_0^1\frac{R^{2n-3}dR}{\left[1-\frac{i}{\alpha\varepsilon}\sqrt{1-\eta^2R^2-(1-\alpha\varepsilon)^2}\right]^{n-1}}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha\varepsilon}\sqrt{1-\eta^2R^2-(1-\alpha\varepsilon)^2}&=\left[\frac{1}{\alpha\varepsilon}(1-R^2)(2-\alpha\varepsilon)+\frac{\beta^2R^2}{\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}\\&=O\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right).\end{aligned}$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to0}K_{n-1}=0.$$

同法可证

$$\int_{v\bar{v}'<2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2}(\pi-a-b)\dot{v}=o(1).$$

综合上述得

$$\lim_{\varepsilon\to0}I_1=0.$$

再算 I_2,

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\eta^2<v\bar{v}'<1-\beta^2\varepsilon^2}\dot{v}\left(\int_{-(\alpha-b)}^{-b}+\int_b^{\alpha-b}\right)\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}\\&=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\operatorname{Im}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n-1}P_k-P_0\right)-\left(\sum_{k=1}^{n-1}Q_k-Q_0\right)\right\}\\&\quad+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{\eta^2<v\bar{v}'<1-\beta^2\varepsilon^2}(\pi-2b)\dot{v}.\end{aligned}$$

其中 $P_0=\int_{\eta^2\leqslant v\bar{v}'\leqslant 1-\beta^2\varepsilon^2}\ln(1+re^{-ib})\dot{v}$,

$$P_k=\frac{1}{k}\int_{\eta^2\leqslant v\bar{v}'\leqslant 1-\beta^2\varepsilon^2}\frac{\dot{v}}{(1+re^{-ib})^k},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,$$

$$Q_0=\int_{\eta^2\leqslant v\bar{v}'\leqslant 1-\beta^2\varepsilon^2}\ln(1-re^{ib})\dot{v},$$

$$Q_k=\frac{1}{k}\int_{\eta^2\leqslant v\bar{v}'\leqslant 1-\beta^2\varepsilon^2}\frac{\dot{v}}{(1-re^{ib})^k},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

易证
$$\int_{\eta^2\leqslant v\bar{v}'\leqslant 1-\beta^2\varepsilon^2}b\dot{v}=o(1),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\eta^2\leqslant v\bar{v}'\leqslant 1-\beta^2\varepsilon^2}\pi\dot{v}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\pi[(\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2})^{2n-2}-\eta^{2n-2}]$$
$$=\frac{\pi^n}{\Gamma(n)}.$$

故
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{\eta^2\leqslant v\bar{v}'\leqslant 1-\beta^2\varepsilon^2}(\pi-2b)\dot{v}=1.$$

由于
$$P_k=\frac{1}{k}\,\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_\eta^{\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2}}\frac{s^{2n-3}ds}{(1+\sqrt{r^2-\beta^2\varepsilon^2}-i\beta\varepsilon)^k}$$
$$=\frac{1}{k}\,\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^{\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2}}\frac{s^{2n-3}ds}{(1+\sqrt{1-s^2-\beta^2\varepsilon^2}-i\beta\varepsilon)^k}$$
$$+o(1).$$

命 $\gamma=\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2}$, $s=\gamma R$, 则
$$P_k=\frac{1}{k}\,\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^1\frac{\gamma^{2n-2}R^{2n-3}dR}{(1-\gamma\sqrt{1-R^2}-i\beta\varepsilon)^k}.$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时, P_k 趋于一实数, 故 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}P_k=0(1\leqslant k\leqslant n-1)$. 同样可证
$$\operatorname{Im}P_0=\operatorname{Im}Q_0=o(1).$$

再算 Q_k. 由于
$$1-re^{ib}=1-\sqrt{r^2-\beta^2\varepsilon^2}-i\beta\varepsilon,$$

故
$$Q_k=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\int_\eta^{\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2}}\frac{s^{2n-3}ds}{(1-\sqrt{1-s^2-\beta^2\varepsilon^2}-i\beta\varepsilon)^k}.$$

而
$$\int_0^\eta\frac{s^{2n-3}ds}{(1-\sqrt{1-s^2-\beta^2\varepsilon^2}-i\beta\varepsilon)^k}=O(\varepsilon^{n-k-1}),$$

$$\left|\int_0^{\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3}ds}{(1-\sqrt{1-s^2-\beta^2\varepsilon^2}-i\beta\varepsilon)^k}\right|$$
$$=\left|\int_0^1 \frac{\gamma^{2n-2}R^{2n-3}dR}{(1-\gamma\sqrt{1-R^2}-i\beta\varepsilon)^k}\right|$$
$$\leqslant \int_0^1 \frac{R^{2n-3}dR}{(1-\sqrt{1-R^2})^k}.$$

右端被积函数在 $R=0$ 处的阶是 $R^{-(2k-2n+3)}$, 当 $k<n-1$ 时,

$$2k-2n+3<1,$$

故右端收敛, 因之

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Q_k = \text{实数},$$

这就得出 $$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Im} Q_k = 0 \quad (k<n-1).$$

最后计算 $$Q_{n-1}=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_\eta^\gamma \frac{s^{2n-3}ds}{(1-\sqrt{\gamma^2-s^2}-i\beta\varepsilon)^{n-1}}$$
$$=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\left(\int_0^\gamma-\int_0^\eta\right)\frac{s^{2n-3}ds}{(1-\sqrt{\gamma^2-s^2}-i\beta\varepsilon)^{n-1}}$$
$$=T_1-T_2.$$

对 T_1 作变换 $s=\gamma R$, 则 T_1 等于

$$\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^1 \frac{\gamma^{2n-2}R^{2n-3}dR}{(1-\gamma\sqrt{1-R^2}-i\sqrt{1-\gamma^2})^{n-1}}.$$

故 $$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Im} T_1=\frac{2^{n-2}\pi^n}{\Gamma(n)}.$$

对 T_2 作变换 $s=\eta R$, 则 T_2 等于

$$\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^1 \frac{\eta^{2n-2}R^{2n-3}dR}{(1-\sqrt{\gamma^2-\eta^2R^2}-i\beta\varepsilon)^{n-1}}.$$

由于 $$(\gamma^2-\eta^2R^2)^{\frac{1}{2}}=(1-\beta^2\varepsilon^2-\eta^2R^2)^{\frac{1}{2}}=1-\alpha R^2\varepsilon+O(\varepsilon^2),$$

所以 $$(1-\sqrt{\gamma^2-\eta^2R^2}-i\beta\varepsilon)^{n-1}=(\alpha R^2-i\beta)^{n-1}\varepsilon^{n-1}+O(\varepsilon^n).$$

而 $$\eta^{2n-2}R^{2n-3}=(2\alpha\varepsilon-(\alpha^2+\beta^2)\varepsilon^2)^{n-1}R^{2n-3},$$

故 $$\lim_{\varepsilon\to 0} T_2=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^1 \frac{(2\alpha)^{n-1}}{(\alpha R^2-i\beta)^{n-1}}R^{2n-3}\,dR.$$

命 $c=\beta/\alpha$, 则上述积分为

$$\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}2^{n-1}\int_0^1\frac{R^{2n-3}dR}{(R^2-ic)^{n-1}}=\frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^1\frac{u^{n-2}du}{(u-ic)^{n-1}}.$$

而

$$\int_0^1\frac{u^{n-2}du}{(u-ic)^{n-1}}=\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k(ci)^k\int_0^1\frac{du}{(u-ic)^{k+1}}$$

$$=\log\frac{1-ic}{-ic}+\sum_{k=1}^{n-2}C_{n-2}^k(ci)^k\frac{1}{k}\left(\frac{1}{(1-ic)^k}-\frac{1}{(-ic)^k}\right).$$

所以

$$\operatorname{Im}\left(\int_0^1\frac{u^{n-2}du}{(u-ic)^{n-1}}\right)=\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{c}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{C_{n-2}^k}{k}\operatorname{Im}\left(\frac{ic}{1-ic}\right)^k$$

$$=\operatorname{tg}^{-1}\frac{\alpha}{\beta}-\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k+1}\cdot\frac{C_{n-2}^k}{k}$$

$$\cdot\frac{\beta^k}{(\alpha^2+\beta^2)^k}\sin k\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

于是得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Im}Q_{n-1}=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\left(2^{n-3}\pi-2^{n-2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\alpha}{\beta}+2^{n-2}h_n\right),$$

而 $$h_n=\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k+1}\frac{C_{n-2}^k}{k}\cdot\frac{\beta^k}{(\alpha^2+\beta^2)^{k/2}}\sin k\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

综合上述得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}I_2=1-2^{n-3}\left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\alpha}{\beta}+\frac{2}{\pi}h_n\right);$$

而(证明见第六章 § 6.5)

$$2^{n-2}\left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\alpha}{\beta}+\frac{2}{\pi}h_n\right)=\frac{2^{n-1}}{\pi}\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}}\cos^{n-2}t\,\frac{\sin(n-1)t}{\sin t}\,dt.$$

因之, (1.9.4)成立。

§ 1.10 K-极限

在定理 1.4.1, 定理 1.4.2, 定理 1.6.2, 定理 1.8.2 中, 我们都假定 z 在满足条件(1.4.1): $\frac{\rho(z,v)}{d(z,\mathscr{L})}<M$ 之下趋于球面上的点 v, 这里 $\rho(z,v)=[(z-v)\overline{(z-v)}']^{\frac{1}{2}}$, $d(z,\mathscr{L})=\min\limits_{u\bar{u}'=1}|1-z\bar{u}'|$, M 是一个正的常数. 如果记

$$H_M(v)=\{z\,|\,z\bar{z}'<1,\ [(z-v)\overline{(z-v)}']^{\frac{1}{2}}<M\min_{u\bar{u}'=1}|1-z\bar{u}'|\},$$

那末，定理 1.4.1, 1.4.2, 1.6.2, 1.8.2 中的极限都可写作 $\lim\limits_{\substack{z\to v\\ z\in H_M(v)}}$. 不妨称这种极限为 H 极限.

Korányi 在文章[1]中引进了另一种极限，Rudin[1] 把它叫做 K 极限. 命

$$D_\alpha(v)=\left\{z\,|\,z\bar{z}'<1,\ |1-z\bar{v}'|<\frac{\alpha}{2}(1-z\bar{z}'),\ \alpha>1\right\}.$$

如果对任意 $\alpha>1$, 均有

$$\lim_{\substack{z\to v\\ z\in D_\alpha(v)}} f(z)=\lambda,$$

则称 $f(z)$ 在 v 处具有 K 极限 λ.

不难证明，K 极限强于 H 极限. 即若 $f(z)$ 在 v 处具有 K 极限 λ, 则必具有 H 极限 λ, 但反之不然.

为了证明这一点，取 $p_n=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$, 则

$$D_\alpha(p_n)=\left\{z\,|\,z\bar{z}'<1,\ |1-z_n|<\frac{\alpha}{2}(1-z\bar{z}'),\ \alpha>1\right\},$$

$$H_M(p_n)=\{z\,|\,z\bar{z}'<1,\ [|z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2+|z_n-1|^2]^{\frac{1}{2}}<M\min_{u\bar{u}'=1}|1-z\bar{u}'|\}.$$

设 $\alpha>2M$, 由于 $\min\limits_{u\bar{u}'=1}|1-z\bar{u}'|=1-(z\bar{z}')^{\frac{1}{2}}$, 则对任意 $z\in H_M(p_n)$, 有

$$\begin{aligned}|1-z_n|&\leqslant[|z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2+|z_n-1|^2]^{\frac{1}{2}}\\&<M(1-(z\bar{z}')^{\frac{1}{2}})<M(1-z\bar{z}')<\frac{\alpha}{2}(1-z\bar{z}'),\end{aligned}$$

即 $z\in D_\alpha(p_n)$. 这就证明了，当 $\alpha>2M$ 时，有

$$H_M(p_n)\subset D_\alpha(p_n).$$

另一方面，我们确实能找到这样的点列 $z^{(k)}$, $(k=1,\ 2,\ \cdots)$, 使得 $z^{(k)}\to p_n\ (k\to\infty)$, $z^{(k)}\in D_\alpha(p_n)$, 但对于任意正数 M, $z^{(k)}\bar{\in} H_M(p_n)$, 例如

$$z^{(k)}=\left(0,\cdots,0,\ \frac{1}{\sqrt{k}},\ \left(1-\frac{1}{k}\right)+i\frac{1}{k}\right)\quad(k=1,\ 2,\ \cdots)$$

便是这样的点列．对于球面上一般的点 v，通过适当的酉变换，同样可证明，当 $\alpha>2M$ 时，$H_M(v)$ 是 $D_\alpha(v)$ 的真子集．这就证明了我们的结论．

在我们证明定理 1.4.1, 1.4.2, 1.6.2, 1.8.2 中，H 极限都可换成 K 极限．事实上，在定理 1.4.1, 1.4.2, 1.6.2, 1.8.2 的证明中，条件(1.4.1)的作用是引导出不等式

$$|1-z\bar{u}'|\geqslant\frac{1}{M+1}|1-v\bar{u}'|\quad(u\bar{u}'=1).$$

而在 Rudin[1] 的引理 5.4.3 中证明了这样的结论：如果

$$u\bar{u}'=1,\ v\bar{v}'=1,\quad z\in D_\alpha(v),$$

那末

$$|1-z\bar{u}'|\geqslant\frac{1}{4\alpha}|1-v\bar{u}'|.$$

因此把 H 极限换成 K 极限，这些定理仍然成立．

关于超球上 Cauchy 型积分的讨论，还可以参阅 Korányi 与 Vagi 的文章[1]以及 Rudin 的书[1]．

第二章　复超球面上的奇异积分方程

§2.1　引　言

一维的奇异积分方程的理论已经相当完整，并有着极为广泛和重要的应用(例如参阅 Н. И. Мусхелишвили[1]，Н. П. Векуа[1]，Ф. Д. Гахов[1]，С. Г. Михлин[1])。

首先研究高维奇异积分方程的是 F. G. Tricomi，他研究的是二维欧氏空间中的奇异积分方程. 之后，G. Giraud，С. Г. Михлин，W. J. Trjitzinsky，J. Horwáth，A. P. Calderon，A. Zygmund，Н. П. Векуа，J. J. Kohn，R. T. Seely，A. B. Бицадзе，E. M. Stein 等等都获得了不少有趣而重要的结果. 在这些工作中，积分大多是在整个欧氏空间中进行，奇异积分中的奇性是用二点之间的距离来刻划的. 我们现在从另一角度来考虑高维的奇异积分方程.

在一维的奇异积分方程中，复变函数的 Cauchy 型积分起着十分重要的作用. 有了 Cauchy 型积分的工具，使得一维的奇异积分方程的处理显得十分简单与深刻. 可是在高维的奇异积分方程的研究中，据作者所看到的，还未有应用 Cauchy 型积分这一工具来处现的. 第一次企图利用多复变数的 Cauchy 型积分作为工具来处理高维奇异积分方程及方程组的是龚昇、孙继广[5]. 在龚

昇、孙继广[5]中，应用上一章§1.3～§1.6中得到的有关超球的Cauchy型积分的结果，来研究复超球面上的奇异积分方程及方程组，对于常系数的奇异积分方程及方程组，得到了比较完整的解决．从处理过程中看，使用这个工具，还是比较简便的．之后，孙继广[1]研究了变系数的奇异积分方程及方程组．以上这些组成本章的主要内容．

在§2.2中，我们证明了含有Cauchy核的复合奇性积分公式．在一个复变数时，这就是Poincaré-Bertrand公式．在§2.3中，我们得到了二个实的奇性核：h-核及B-核，并讨论了它们的一些性质．h-核在一个变数时就是Hilbert核，但B-核在一个变数时是不出现的．这也许是显示了多个变数与一个变数时的根本性不同．在§2.3和§2.4中，我们给出了含有B-核与h-核的复合奇性积分公式．定理2.4.1的系2.4.1，在一个复变数时，就是Hilbert公式．在这一章中，我们讨论由在复超球面上满足Lipschitz条件的复值连续函数所组成的线性空间$\mathscr{L}^*$和由在其上满足Lipschitz条件的实值连续函数所组成的线性空间$\mathscr{L}$，这些核实际上是定义了在$\mathscr{L}^*$上或$\mathscr{L}$上的线性算子．

§2.2 含有Cauchy核的复合奇性积分公式

在§1.3中已经证明：若$f(u)$在$u\bar{u}'=1$上满足$\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$，则Cauchy主值$(v\bar{v}'=1)$

$$\begin{aligned}&\mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-v\bar{u}'|>\varepsilon}}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}\end{aligned}\qquad(2.2.1)$$

是存在的．并且当ε沿着使

$$\frac{[(z-v)\overline{(z-v)}']^{\frac{1}{2}}}{\min\limits_{u\bar{u}'=1}|1-zu'|}<M \quad (\text{常数})$$

的路径趋于 v 时，有 Plemelj 公式

$$\lim_{z\to v}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}(1-z\bar{u}')^{-n}f(u)\dot{u}$$

$$=\text{v. p. }\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}(1-v\bar{u}')^{-n}f(u)\dot{u}+\frac{1}{2}f(v). \quad (2.2.2)$$

(如在 § 1.10 中指出的那样，在 K 极限意义下，(2.2.2)依然成立．今后趋限都在 K 极限意义下进行，不再申明．)在 § 1.6～§ 1.8 中，还证明了有种种不同的方法定义 Cauchy 主值，并给出各种不同的 Plemelj 公式．例如，如果定义 Cauchy 主值为

$$\text{v. p. }\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^{n}}\dot{u}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ \alpha^2(1-\operatorname{Re}v\bar{u}')^2+\beta^2(\operatorname{Im}v\bar{u}')^2>\varepsilon}}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n}}, \quad (2.2.3)$$

则(2.2.3)是存在的，且有 Plemelj 公式

$$\lim_{z\to v}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}(1-z\bar{u}')^{-n}f(u)\dot{u}$$

$$=\text{v. p. }\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}(1-v\bar{u}')^{-n}f(u)\dot{u}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}f(v), \quad (2.2.4)$$

这里 $\gamma=\alpha/\beta$．

以这些结果为基础，我们有

定理 2.2.1 若 $\varphi(w)\in\operatorname{Lip}\alpha$, $(0<\alpha\leqslant 1)$, $(w\bar{w}'=1)$，则

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}^{2}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\varphi(w)}{(1-u\bar{w}')^{n}}\dot{w}=\frac{\varphi(v)}{4}, \quad (2.2.5)$$

其中 $v\bar{v}'=1$，积分都是取 Cauchy 主值，而 Cauchy 主值是按照(2.2.1)所定义．

在一个变数时，此即著名的 Poinceré-Bertrand 公式.

定理 2.2.1 还可拓广为

定理 2.2.2 若 $\varphi(u)\in \mathrm{Lip}\,p$, $0<p\leqslant 1$, $(u\bar{u}'=1)$，且

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)^{n-1}=1,$$

则我们有

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}^2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\frac{\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}\frac{\varphi(w)\dot{w}}{(1-u\bar{w}')^n}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4\beta_1\beta_2}{(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)}\right)^{n-1}\varphi(v)\ , \qquad (2.2.6)$$

其中 $v\bar{v}'=1$, $\gamma_1=\alpha_1/\beta_1$, $\gamma_2=\alpha_2/\beta_2$, 积分都是取 Cauchy 主值，而 Cauchy 主值是按照(2.2.3)所定义.

现在来证定理 2.2.2.

记 $\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}=a$, $\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)^{n-1}=b$,

令
$$\varphi_1(v)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\frac{\varphi(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u},$$
$$\varphi_2(v)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\frac{\varphi_1(u)}{(1-v\bar{u}')^n}\dot{u}.$$

作 Cauchy 型积分

$$f(z)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}(1-z\bar{u}')^{-n}\varphi(u)\dot{u},$$
$$f_1(z)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}(1-z\bar{u}')^{-n}\varphi_1(u)\dot{u}.$$

其中 $z\bar{z}'<1$. 当 z 从 $z\bar{z}'<1$ 中沿着非切线方向趋于边界时，由定理 1.6.2,

$$f(v)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}(1-v\bar{u}')^{-n}\varphi(u)\dot{u}+a\varphi(v),$$
$$f_1(v)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}(1-v\bar{u}')^{-n}\varphi_1(u)\dot{u}+b\varphi_1(v).$$

由 $\varphi_1(v)$ 及 $\varphi_2(v)$ 的定义知

$$\varphi_1(v)=f(v)-a\varphi(v),\ \varphi_2(v)=f_1(v)-b\varphi_1(v).$$

将 $\varphi_1(v)$ 代入 $f_1(z)$ 的表达式中，

$$f_1(z)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}(1-z\bar{u}')^{-n}f(u)\dot{u}$$

$$-a\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}(1-z\bar{u}')^{-n}\varphi(u)\dot{u}$$

$$=f(z)-af(z)=(1-a)f(z).$$

因而

$$\varphi_2(v)=(1-a)f(v)-(f(v)-a\varphi(v))b$$

$$=(1-a-b)f(v)+ab\varphi(v),$$

但 $1-a-b=0$，故得(2.2.6)．

从定理的证明中，可以得到更一般的结果．如果我们可以定义一种 Cauchy 主值，这种 Cauchy 主值当函数 $f(u)$ 满足 Lipschitz 条件时是存在的，且当 Cauchy 型积分从 $z\bar{z}'<1$ 在某种限制下趋于边界上的点时，可以用这种 Cauchy 主值来表示，即可得到相应的 Plemelj 公式，而在 Plemelj 公式中，常数 $\frac{1}{2}$ 被 a 所替代．另外有一种定义 Cauchy 主值的方法，使相应的 Plemelj 公式中 $\frac{1}{2}$ 被 b 所替代，且 $a+b=1$．那末这二种 Cauchy 主值相复合后得到的值就是 $abf(v)$．

由定理 2.2.2，可得一组反演公式．

系 2.2.1 若 $\varphi(u)\in \mathrm{Lip}\,p$，则由下面(2.2.7)所定义的 $\psi(v)$ 也满足 Lipschitz 条件，且

$$2\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2\beta_1}\right)^{n-1}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}(1-v\bar{u}')^{-n}\varphi(u)\dot{u}=\psi(v), \tag{2.2.7}$$

$$2\left(\frac{\alpha_2+\beta_2}{2\beta_2}\right)^{n-1}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}(1-v\bar{u}')^{-n}\psi(u)\dot{u}=\varphi(v) \tag{2.2.8}$$

相互推导．但

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)^{n-1}=1,$$

$$\gamma_1=\alpha_1/\beta_1,\ \gamma_2=\alpha_2/\beta_2.$$

特别取 Cauchy 主值的定义为(2.2.1)，则有

$$2\,\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}(1-v\bar{u}')^{-n}\varphi(u)\dot{u}=\psi(v), \qquad (2.2.9)$$

$$2\,\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}(1-v\bar{u}')^{-n}\psi(u)\dot{u}=\varphi(v) \qquad (2.2.10)$$

相互推导.

从定理 2.2.2 的证明过程中可以看出，我们有

定理 2.2.3 若 $\varphi(u)\in\mathrm{Lip}\,p\,(0<p\leqslant1)$, $v\bar{v}'=1$，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_{2n-1}^2}&\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\frac{\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}\frac{\varphi(w)\dot{w}}{(1-u\bar{w}')^n}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)^{n-1}\right)\\&\quad\cdot\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\frac{\varphi(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}+\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}\right)\\&\quad\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}\varphi(v),\end{aligned} \qquad (2.2.11)$$

其中 $\gamma_1=\alpha_1/\beta_1$, $\gamma_2=\alpha_2/\beta_2$，积分都是取 Cauchy 主值，而 Cauchy 主值是按(2.2.3)所定义.

§2.3 B-核与h-核，B-型积分与 h-型积分

若 $f(z)=U(z)+iV(z)$ 在 $z\bar{z}'<1$ 内解析，在 $z\bar{z}'\leqslant1$ 连续(事实上，由定理 0.2.2，只要求 $f(z)\in H_1$ 已足够)，则根据圆型域内的解析函数的 Schwarz 公式，有

$$f(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}U(u)S(z,\ u)\dot{u}+iV(0), \qquad (2.3.1)$$

其中 $S(z,\ u)=2H(z,\ \bar{u})-1$ 为 Schwarz 核，而

$$H(z,\ \bar{u})=(1-z\bar{u}')^{-n}.$$

令

$$B(z,\ u)=\mathrm{Re}(S(z,\ u))=H(z,\ \bar{u})+H(u,\ \bar{z})-1, \tag{2.3.2}$$

$$h(z,\ u)=\mathrm{Im}(S(z,\ u))=(H(z,\ \bar{u})-H(u,\ \bar{z}))/i, \tag{2.3.3}$$

于是公式(2.3.1)也可以写成

$$U(z)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}U(u)B(z,\ u)\dot{u}, \tag{2.3.4}$$

$$V(z)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}U(u)h(z,\ u)\dot{u}+V(0). \tag{2.3.5}$$

在 $n=1$ 的情形, 核 $B(z,\ u)$ 与 $h(z,\ u)$ 分别为 Poisson 核与共轭 Poisson 核; 但当 $n>1$ 时, $B(z,\ u)$ 与 $h(z,\ u)$ 只能分别称之为 Schwarz 核的实部与虚部, 而不能称之为 Poisson 核与共轭 Poisson 核, 因为它们已不再具有作为 Poisson 核与共轭 Poisson 核的一些重要性质了.

若 $U(u)\in \mathrm{Lip}\,p\,(0<p\leqslant 1)$, 在(2.3.5)中令 z 趋于边界上的一点 v, 则由定理 1.6.2 可得

$$V(v)=\text{v. p. }\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}U(u)h(v,\ u)\dot{u}+V(0), \tag{2.3.6}$$

其中

$$h(v,\ u)=(H(v,\ \bar{u})-H(u,\ \bar{v}))/i \tag{2.3.7}$$

称为 h-核, 当 $n=1$ 时, 它就是熟知的 Hilbert 核. 而 Cauchy 主值是按(2.2.3)所定义的.

为了确定起见, 不妨取 $V(0)=0$, 则我们有

$$V(v)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}U(u)h(v,\ u)\dot{u}, \tag{2.3.8}$$

此处积分是按照由(2.2.3)所定义的 Cauchy 主值的意义下进行的. 由(2.3.7)及定理 1.5.1, 易知: 若 $z\bar{z}'<1$ 内的 B-调和函数 $U(z)$ 的边界值 $U(u)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, 则它的(唯一确定的)共轭 B-调和函数 $V(z)$ 的边界值 $V(u)$ (如(2.3.8)所示) $\in \mathrm{Lip}(\alpha-\delta)$, δ 是小于

α 的任一正数.

定义 如果在 $u\bar{u}'=1$ 上任与一个可积实值函数 $\varphi(u)$, 我们称

$$\Phi(z)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)B(z,\ u)\dot{u} \qquad (2.3.9)$$

为 B-型积分, 称

$$\Psi(z)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)h(z,\ u)\dot{u} \qquad (2.3.10)$$

为 h-型积分.

(2.3.9)及(2.3.10)定义了一对在 $z\bar{z}'<1$ 内共轭的B-调和函数. 自然, $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ 在边界上的极限值, 当 $n>1$ 时未必存在, 即使存在, 也未必是 $\varphi(v)$ 及 $\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}$. 当 $n>1$ 时, $\varphi(v)$ 即使是连续的, 或是满足 Lipschitz 条件, 或是有更强一些的要求, $\Phi(z)$ 的极限值也不一定是 $\varphi(v)$, 这显示出多复变数与单复变数在这时候有着根本性的不同.

由定理 1.6.2, 我们可以得到

定理 2.3.1 若 $\varphi(u)\in\mathrm{Lip}\,p$, 那末由 (2.3.9)及(2.3.10)所定义的 $\Phi(z)$ 与 $\Psi(z)$ 在边界上的极限值存在, 并且有

$$\Phi(v)=\mathrm{v.\ p.}\ \omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}+\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\varphi(v), \qquad (2.3.11)$$

及

$$\Psi(v)=\mathrm{v.\ p.}\ \omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}. \qquad (2.3.12)$$

(2.3.11)中的

$$B(v,\ u)=H(v,\ \bar{u})+H(u,\ \bar{v})-1 \qquad (2.3.13)$$

称为 B-核. 这里 Cauchy 主值按(2.2.3)所定义.

证 事实上, z 从 $z\bar{z}'<1$ 内趋于 v, 则

$$\Phi(v)=\lim_{z\to v}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)(H(z,\bar{u})+H(u,\bar{z})-1)\dot{u}$$

$$=\text{v. p. }\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)H(v,\bar{u})\dot{u}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\varphi(u)+\text{v. p. }\omega_{2n-1}^{-1}\overline{\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)H(v,\bar{u})\dot{u}}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\varphi(u)-\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)\dot{u}$$

$$=\text{v. p. }\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)(H(v,\bar{u})+H(u,\bar{v})-1)\dot{u}$$

$$+\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\varphi(v)$$

$$=\text{v. p. }\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)B(v,u)\dot{u}+\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\varphi(v).$$

同理可证(2.3.12)。

公式(2.3.11)与(2.3.12)可以导出一系列重要的推论。

系 2.3.1　若 $\varphi(u)\in\mathscr{L}$, 则 $\varphi(u)$是 $z\bar{z}'<1$ 内某一个 B-调和函数的边界值的充分和必要条件是

$$\text{v. p. }\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)B(v,u)\dot{u}=\left(1-\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\right)\varphi(v).\tag{2.3.14}$$

公式(2.3.11)及(2.3.12)表明: 若 $\varphi(u)\in\mathscr{L}$, 则

$$\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\varphi(v)+\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)B(v,u)\dot{u}$$

及

$$\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)h(v,u)\dot{u}$$

必分别为 $z\bar{z}'<1$ 内的二个 B-调和函数的边界值, 因而利用系 2.3.1 可得

系 2.3.2　若 $\varphi(u)\in\mathscr{L}$, 则

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}B(v,u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_2)}\varphi(w)B(u,w)\dot{w}$$

$$=\left(1-\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}\right)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)B(u,v)\dot{u}$$

$$-\left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)^{n-1}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)B(u,\ v)\dot{u}$$

$$+\left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)^{n-1}\left(1-\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}\right)\varphi(v), \qquad (2.3.15)$$

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}B(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_2)}\varphi(w)h(u,\ w)\dot{w}$$

$$=\left(1-\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}\right)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)h(u,\ v)\dot{u}, \qquad (2.3.16)$$

这里 $\gamma_1=\alpha_1/\beta_1$, $\gamma_2=\alpha_2/\beta_2$, 积分都是按由 (2.2.3) 所定义的 Cauchy 主值进行.

同时,利用(2.3.11)及(2.3.12)容易得到

系 2.3.3 若 $\varphi(u)\in\mathscr{L}$,则

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}h(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}\varphi(w)B(u,\ w)\dot{w}$$

$$=\left(1-\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}\right)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}. \qquad (2.3.17)$$

事实上,由(2.3.8), (2.3.11), (2.3.12)知

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}h(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}\varphi(w)B(u,w)\dot{w}$$

$$=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\left(\Phi(u)-\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}\varphi(u)\right)h(v,\ u)\dot{u}$$

$$=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\Phi(u)h(v,\ u)\dot{u}$$

$$-\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}$$

$$=\Psi(v)-\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}$$

$$=\left(1-\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1}\right)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}.$$

系 2.3.4 若 $\varphi(u)\in\mathscr{L}$,则

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{v\bar{v}'=1}\dot{v}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}$$

$$=\left(1-\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\right)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{v\bar{v}'=1}\varphi(v)\dot{v},\qquad(2.3.18)$$

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{v\bar{v}'=1}\dot{v}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}=0.\qquad(2.3.19)$$

事实上, (2.3.18)式之左端等于

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'=1}\left(\Phi(v)-\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\varphi(v)\right)\dot{v}$$

$$=\Phi\ (0)-\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{v\bar{v}'=1}\varphi(v)\dot{v}$$

$$=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{v\bar{v}'=1}\varphi(v)B(0,\ v)\dot{v}$$

$$-\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{v\bar{v}'=1}\varphi(v)\dot{v}$$

$$=\left(1-\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\right)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{v\bar{v}'=1}\varphi(v)\dot{v}.$$

同理可得(2.3.19).

在多复变数函数论中,一般来说,以下的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u(z_1,\ \cdots,\ z_n)}{\partial z_k\partial\bar{z}_l}=0, & k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\\ u(z_1,\ \cdots,\ z_n)\Big|_{\substack{z=u\\ u\bar{u}'=1}}=\varphi(u)\end{cases}\qquad(2.3.20)$$

是无解的(参阅 Bergman[1]). 但从系 2.3.1,我们得到

系 2.3.5　若 $\varphi(u)\in\mathscr{L}$, 则由 (2.3.20) 所定义的 Dirichlet 问题有解的充分与必要条件为

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}=\left(1-\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\right)\varphi(v).$$

若这条件满足, (3.20)有唯一解,并且它的解就是

$$u(z)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)B(z,\ u)\dot{u}.$$

特别值得注意的是 $\alpha=\beta$ 的情形,也就是 Cauchy 主值是按照

(2.2.1)来定义的. 这时候,(2.3.11)成为

$$\Phi(v)=\text{v. p. }\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}+\varphi(v),\quad(2.3.21)$$

(2.3.14)成为

$$\text{v. p.}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)B(v,\ u)=0,\qquad(2.3.22)$$

(2.3.15)成为

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1}B(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(w)B(u,\ w)\dot{w}$$

$$+\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}=0,\qquad(2.3.23)$$

(2.3.16)成为

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{uu'=1}B(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(w)h(u,\ w)\dot{w}=0.$$

(2.3.17)成为

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{v}'=1}h(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(w)B(u,\ w)\dot{w}=0,\quad(2.3.24)$$

(2.3.18)成为

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{v\bar{v}'=1}\dot{v}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}=0,$$

而(2.3.20)有解的充要条件也成为

$$\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}=0.$$

§2.4 含有h-核的复合奇性积分公式

在上一节中,我们已经得到了一系列含有B-核与h-核的复合奇性积分公式,此外,我们还有

定理 2.4.1 若 $\varphi(u)\in\mathscr{L}$, $u\bar{u}'=1$,则

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_0)}h(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}\varphi(w)h(u,\ w)\dot{w}$$

$$
\begin{aligned}
&=-(1-2a)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{w}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}\\
&\quad-2a\,\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}\\
&\quad+2a\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)\dot{u}-2a(1-2a+2b)\varphi(v).
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

这里积分都是按照(2.2.3)所定义的 Cauchy 主值意义下进行的，而

$$
\gamma_1=\frac{\alpha_1}{\beta_1},\quad \gamma_2=\frac{\alpha_2}{\beta_2},
$$

$$
a=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1},\quad b=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)^{n-1}.
$$

证　由于

$$
\frac{2}{(1-v\bar{u}')^n}=B(v,\ u)+ih(v,\ u)+1,
\tag{2.4.2}
$$

根据定理 2.2.3 及上节的结果，有

$$
\begin{aligned}
&\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}(1-v\bar{u}')^{-n}\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}(1-u\bar{w}')^{-n}\varphi(w)\dot{w}\\
&=(1-a-b)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)(1-v\bar{u}')^{-n}\dot{u}\\
&\quad+(1-a)a\varphi(v).
\end{aligned}
\tag{2.4.3}
$$

(2.4.3)的左边，由(2.4.2)为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}(B(v,\ u)+ih(v,\ u)+1)\dot{u}\\
&\quad\cdot\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}(B(u,\ w)+ih(u,\ w)+1)\varphi(w)\dot{w}.
\end{aligned}
$$

由(2.3.15)，

$$
\begin{aligned}
&\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}B(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}\varphi(w)B(u,\ w)\dot{w}\\
&=-2a\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}+2a(1-2b)\varphi(v)
\end{aligned}
$$

$$+(1-2b)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)B(u,\ v)\dot{u}.$$

由(2.3.17)，

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}h(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}B(u,\ w)\varphi(w)\dot{w}$$

$$=(1-2a)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u},$$

由(2.3.18)，

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}B(u,\ w)\varphi(w)\dot{w}$$

$$=(1-2a)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{uu'=1}\varphi(u)\dot{u},$$

由(2.3.16)、(2.3.19)，

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{uu'=1(\gamma_1)}B(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}h(u,\ w)\varphi(w)\dot{w}$$

$$=(1-2b)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{uu'=1(\gamma_2)}\varphi(u)h(u,\ v)\dot{u},$$

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{uu'=1}\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}h(u,\ w)\varphi(w)\dot{w}=0$$

以及

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}(B(v,\ u)+ih(v,\ u)+1)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}\varphi(w)\dot{w}$$

$$=2\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}H(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(w)\dot{w}$$

$$=\frac{2(1-b)}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(w)\dot{w},$$

所以(2.4.3)的左边为

$$\frac{1}{4}\Big\{-2a\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}+2a(1-2b)\varphi(v)$$

$$+(1-2b)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)B(u,\ v)\dot{u}$$

$$+i(1-2a)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{uu'=1(\gamma_2)}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}$$

$$+i(1-2b)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)h(u,\ v)\dot{u}$$
$$+2(1-b)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)\dot{u}$$
$$-\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}h(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}h(u,\ w)\varphi(w)\dot{w}\Big\},$$

而(2.4.3)的右边为

$$\frac{1}{2}(1-a-b)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)\left(B(v,\ u)+ih(v,\ u)+1\right)\dot{u}$$
$$+(1-a)a\varphi(v).$$

最后得到

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}h(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}h(u,\ w)\varphi(w)\dot{w}$$
$$=-(1-2a)\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}$$
$$-2a\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}$$
$$+2a\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)\dot{u}-2a(1-2a+2b)\varphi(v).$$

这是因为：当 z 趋于边界上一点 v 时，

$$\lim_{z\to v}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)h(z,\ u)\dot{u}=\text{v. p.}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}$$
$$=\text{v. p.}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}.$$

从定理 2.4.1 及系 2.3.1，可以得到

系 2.4.1　若 $U(z)$ 为 $z\bar{z}'<1$ 内的 B-调和函数，且有边界值 $U(u)$，且 $U(u)\in\mathscr{L}$，则

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}h(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)}h(u,\ w)U(w)\dot{w}$$
$$=2a\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}U(u)\dot{u}-2a(1-2a+2b)U(v).$$

(2.4.4)

这可以看成 Hilbert 公式的推广.

特别重要的情形是 $\alpha=\beta$ 的时候，如果在定理 2.4.1 中，所有的 Cauchy 主值都是按照 (2.2.1) 来定义，则定理 2.4.1 及系 2.4.1 成为

定理 2.4.2　若 $\varphi(u)\in\mathscr{L}$，则

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1}h(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(w)h(u,\ w)\dot{w}$$
$$=-\varphi(v)-\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}$$
$$+\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)\dot{u}. \tag{2.4.5}$$

系 2.4.2(Hilbert 公式)　若 $U(z)$ 为 $z\bar{z}'<I$ 内的 B-调和函数，具有边界值 $U(u)$，且 $U(u)\in\mathscr{L}$，则

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1}h(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}U(w)h(u,\ w)\dot{w}$$
$$=-U(v)+\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}U(u)\dot{u}. \tag{2.4.6}$$

当 $n=1$ 时，上式即为著名的 Hilbert 公式.

前已指出，当 $n=1$ 时，核 $h(v,\ u)$ 就是 Hilbert 核 $h(\tau,\ \theta)=\operatorname{ctg}\dfrac{\tau-\theta}{2}$. 易知，$h(\tau,\ \theta)$ 有如下的重要性质：设 $\varphi(\theta)$ 是在 $|z|=1$ 上满足 Lipschitz 条件的实值函数，则 $\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)h(\tau,\ \theta)\,d\theta=0$ 的充分与必要条件是 $\varphi(\theta)=$ 常数. 但当 $n>1$ 时，如果 $\varphi(u)\in\mathscr{L}$，且 $\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}=0$，$\varphi(u)$ 未必是常数. 这是因为任取 $\psi(u)\in\mathscr{L}$，命 $\varphi(u)=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{w\bar{w}'=1}\psi(w)B(u,\ w)\dot{w}$，则必有 $\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)\cdot h(v,\ u)\dot{u}=0$（由 (2.3.24)）. 例如取 $\psi(u)=u_1\bar{u}_2+\bar{u}_1u_2$，记 $\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}(u_1\bar{u}_2+\bar{u}_1u_2)\dot{u}=C$，则相应的 $\varphi(u)=C-u_1\bar{u}_2-\bar{u}_1u_2$，它在 $u\bar{u}'=1$ 上并非常数，然而 $\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}=0$.

不过从系 2.4.2 可得

系 2.4.3 若 $\varphi(u)\in\mathscr{L}$, 并且是 $z\bar{z}'<1$ 内某 B-调和函数的边界值, 则 $\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}=0$ 的充分与必要条件是 $\varphi(u)=$ 常数.

充分性是显然的. 必要性可由

$$0=\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1}h(v,\ u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(w)h(u,\ w)\dot{w}$$
$$=-\varphi(v)+\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)\dot{u}$$

立刻得到.

§2.5 算子 H, B, h

在§2.1 中, 我们已经定义了线性空间 $\mathscr{L}^*$ 和 $\mathscr{L}$. 现在定义算子 H、B、h 和 A、I、O 如下:

$$H_\gamma\varphi=2\left(\frac{\alpha+\beta}{2\beta}\right)^{n-1}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)H(v,\ \bar{u})\dot{u}$$
$$(\varphi\in\mathscr{L}^*), \tag{2.5.1}$$

$$B_\gamma\varphi=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}\quad(\varphi\in\mathscr{L}), \tag{2.5.2}$$

$$h_\gamma\varphi=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma)}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}\quad(\varphi\in\mathscr{L}). \tag{2.5.3}$$

这里积分都是 Cauchy 主值意义下的积分, 而 Cauchy 主值按(2.2.3)定义. 特别当 $\alpha=\beta$ 时, 即 Cauchy 主值按(2.2.1) 定义, 则定义 H、B、h 如下:

$$H\varphi=2\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)H(v,\ \bar{u})\dot{u}\quad(\varphi\in\mathscr{L}^*), \tag{2.5.4}$$

$$B\varphi=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)B(v,\ u)\dot{u}\quad(\varphi\in\mathscr{L}), \tag{2.5.5}$$

$$h\varphi=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)h(v,\ u)\dot{u}\quad(\varphi\in\mathscr{L}). \tag{2.5.6}$$

另外，算子 A、I、O 定义如下：

$$A\varphi=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)\dot{u}\quad(\varphi\in\mathscr{L}^*),\tag{2.5.7}$$

$$I\varphi=\varphi\quad(\varphi\in\mathscr{L}^*),\tag{2.5.8}$$

$$O\varphi=0\quad(\varphi\in\mathscr{L}^*).\tag{2.5.9}$$

显然，它们是相应的线性空间 $\mathscr{L}^*$ 或 $\mathscr{L}$ 上的线性算子.

所有在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lipschitz 条件，并且是 $z\bar{z}'<1$ 内某一 B-调和函数的边界值的实值函数的全体，显然构成实数域上的一个线性空间，并且是 $\mathscr{L}$ 的一个子空间，记之为 $\mathscr{B}$.

利用线性算子的符号，将 § 2.2, § 2.3 和 § 2.4 中的结果，列表如下：

$$H_{\gamma_1}H_{\gamma_2}=\frac{1}{b}\,(1-a-b)\,H_{\gamma_1}+\frac{1}{b}(1-a)I\quad(\text{在}\,\mathscr{L}^*\,\text{上}),\tag{2.5.10}$$

这里

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)^{n-1},\qquad b=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)^{n-1}.\tag{2.5.11}$$

特别当 $a+b=1$ 时，就有

$$H_\gamma H_{\gamma^*}=H_{\gamma^*}H_\gamma=I\quad(\text{在}\,\mathscr{L}^*\text{上}),\tag{2.5.12}$$

这里

$$\gamma^*=\frac{2(1+\gamma)}{[2(1+\gamma)^{n-1}-2^{n-1}]^{\frac{1}{n-1}}}-1,\tag{2.5.13}$$

而上式当

$$\gamma>2^{\frac{n-2}{n-1}}-1\tag{2.5.14}$$

时是有意义的.

当 $\alpha=\beta$ 时，$a=b=\dfrac{1}{2}$，故有

$$H^2=I\quad(\text{在}\,\mathscr{L}^*\,\text{上}).\tag{2.5.15}$$

对于算子 B 有

$$B_{\gamma_1}B_{\gamma_2}=(1-2a)B_{\gamma_2}-2bB_{\gamma_1}+2b(1-2a)I \quad (\text{在 } \mathscr{L} \text{ 上}), \tag{2.5.16}$$

这里 a, b 由(2.5.11)所定义，特别有

$$B^2=-B \quad (\text{在 } \mathscr{L} \text{ 上}). \tag{2.5.17}$$

对于算子 h 有

$$h_{\gamma_2}h_{\gamma_1}=-(1-2a)B_{\gamma_1}-2aB_{\gamma_2}+2aA-2a(1-2a+2b)I \quad (\text{在 } \mathscr{L} \text{ 上}). \tag{2.5.18}$$

特别有

$$h^2=-I-B+A \quad (\text{在 } \mathscr{L} \text{ 上}). \tag{2.5.19}$$

显然

$$A^2=A \quad (\text{在 } \mathscr{L}^* \text{ 上}). \tag{2.5.20}$$

在 $\mathscr{L}$ 上有

$$h_{\gamma_2}B_{\gamma_1}=B_{\gamma_1}h_{\gamma_2}=(1-2a)h_{\gamma_2}, \tag{2.5.21}$$

$$AB_{\gamma_1}=B_{\gamma_1}A=(1-2a)A, \tag{2.5.22}$$

$$Ah_\gamma=h_\gamma A=O. \tag{2.5.23}$$

特别有

$$AB=BA=O, \tag{2.5.24}$$

$$Ah=hA=O, \tag{2.5.25}$$

$$Bh=hB=O. \tag{2.5.26}$$

设 $\varphi\in\mathscr{L}$, 则

$$B_{\gamma_1}\varphi=(1-2a)I \Leftrightarrow \varphi\in\mathscr{B}, \tag{2.5.27}$$

特别有

$$B\varphi=0 \Leftrightarrow \varphi\in\mathscr{B}. \tag{2.5.28}$$

设 $\varphi\in\mathscr{B}$, 则

$$h_{\gamma_1}\varphi=0 \Leftrightarrow \varphi=\text{常数}. \tag{2.5.29}$$

在以下几节中，我们将利用这些公式，求解复超球面上的、常系数的奇异积分方程和方程组.

在§2.4中已经指出，当 z 趋于边界上一点 v 时，

$$\lim_{z\to v}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)h(z,u)u$$

$$=\mathrm{v.\,p.}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)h(v,u)\dot{u}$$

$$=\mathrm{v.\,p.}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)h(v,u)\dot{u}.$$

同样

$$\lim_{z\to v}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)B(z,u)\dot{u}$$

$$=\mathrm{v.\,p.}\ \omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)B(v,u)\dot{u}+2(1-a)\varphi(v)$$

$$=\mathrm{v.\,p.}\ \omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)B(v,u)\dot{u}+2(1-b)\varphi(v).$$

$$\lim_{z\to v}\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)H(z,u)\dot{u}$$

$$=\mathrm{v.\,p.}\ \omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)H(v,u)\dot{u}+a\varphi(v)$$

$$=\mathrm{v.\,p.}\ \omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)}\varphi(u)H(v,u)\dot{u}+b\varphi(v).$$

特别取 $\alpha_2=\beta_2$, 则 $\gamma_2=1$, 于是有

$$h_{\gamma_1}=h, \tag{2.5.30}$$

$$B_{\gamma_1}=B-(1-2a)I, \tag{2.5.31}$$

$$H_{\gamma_1}=H+\frac{1}{2}(1-2a)I. \tag{2.5.32}$$

所以任意带有奇异积分算子 h_γ, B_γ, H_γ 的奇异积分方程, 均可归化为带有奇异积分算子 h, B, H 的奇异积分方程. 并且本节中有关 h_γ, B_γ, H_γ 的复合奇性积分公式, 均可由 h, B, H 的复合奇性积分公式, 利用(2.5.30), (2.5.31), (2.5.32)得出来. 所以以下主要讨论有 h, B, H 核的奇异积分方程及方程组.

§2.6　有 Cauchy 核的奇异积分方程

本节考虑方程

$$s_1\varphi+t_1H_\gamma\varphi+K\varphi=f, \tag{2.6.1}$$

其中 s_1, t_1 为复数，已给 $f\in\mathscr{L}$, $K\varphi=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)K(v,u)\dot{u}$, 核 $K(v, u)$是对 v, u 皆满 Lipschitz 条件的复值函数.

由(2.5.32)，方程(2.6.1)就是

$$\left[s_1+\frac{1}{2}(1-2c)t_1\right]\varphi+t_1H\varphi+K\varphi=f,$$

这里

$$c=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}.$$

记

$$s_1+\frac{1}{2}(1-2c)t_1=s,\ t_1=t, \tag{2.6.2}$$

则上式成为

$$s\varphi+tH\varphi+K\varphi=f. \tag{2.6.3}$$

现在来解方程(2.6.3). 先考虑其特征方程

$$s\varphi+tH\varphi=f, \tag{2.6.4}$$

并设 $s^2-t^2\neq0$.

用算子

$$M=sI-tH \tag{2.6.5}$$

作用于(2.6.4)式的两端，应用(2.5.15)，得到

$$(s^2-t^2)\varphi=sf-tHf,$$

即

$$\varphi=[s/(s^2-t^2)]f-[t/(s^2-t^2)]Hf \tag{2.6.6}$$

是方程(2.6.4)在 $\mathscr{L}^*$ 内的唯一解.

对于方程(2.6.3)，我们可以应用如(2.6.5)所示的算子 M，把它归结为一个与之等价的 Fredholm 方程.

事实上，以 M 作用于(2.6.3)，应用(2.5.15)，立得

$$(s^2-t^2)\varphi+sK\varphi-tHK\varphi=sf-tHf. \qquad (2.6.7)$$

由于

$$HK\varphi=\omega_{2n-1}^{-2}\int_{u\bar{u}'=1}(1-v\bar{u}')^{-n}\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(\omega)K(u,\ w)\dot{w}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_{2n-1}^{-2}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-v\bar{u}'|>\varepsilon}}(1-v\bar{u}')^{-n}\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(w)K(u,\ w)\dot{w}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_{2n-1}^{-2}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(w)\dot{w}\int_{|1-v\bar{u}'|>\varepsilon}(1-v\bar{u}')^{-n}K(u,\ w)\dot{u},$$

应用 Lebesgue 定理，上式即为

$$\omega_{2n-1}^{-2}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(w)\dot{w}\int_{u\bar{u}'=1}(1-v\bar{u}')^{-n}K(u,\ w)\dot{u}.$$

由定理 1.5.2，$\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}(1-v\bar{u}')^{-n}K(u,\ w)\dot{u}=K_1(v,\ w)$ 对 v，w 皆满足 Lipschitz 条件，所以 (2.6.7)是一个 Fredholm 方程，可写之为

$$s_2\varphi+K_2\varphi=F, \qquad (2.6.8)$$

其中 $s_2=s^2-t^2\neq 0$，$F=Mf$，$K_2=sK-tHK$.

方程(2.6.8) 与 (2.6.3) 是等价的，这只需证明，凡方程(2.6.8)的解(即(2.6.7)的解)，必满足方程(2.6.3). 将算子

$$M^*=sI+tH$$

作用于(2.6.7)式两端，应用(2.5.15)，便可得(2.6.3).

综上所证，便得

定理 2.6.1 设在方程(2.6.3)中，s，t 为复数，满足 $s^2-t^2\neq 0$，已给 $f\in\mathscr{L}^*$，积分算子 K 的核 $K(v,\ u)$满足 Lipschitz 条件，则

(i) 方程(2.6.3)的特征方程(2.6.4)在 $\mathscr{L}^*$ 内有唯一解，如(2.6.6)所示；

(ii) 在 $\mathscr{L}^*$ 内，奇异积分方程 (2.6.3) 与 Fredholm 方程(2.6.8)等价.

与之相等价的定理是

定理 2.6.2 设在方程(2.6.1)中, s_1, t_1 为复数, 满足

$$s_1^2+(1-2c)\,cs_1t_1+\left(c^2-c-\frac{3}{4}\right)t_1^2\neq 0,$$

已给 $f\in\mathscr{L}^*$, 积分算子 K 的核 $K(v,u)$满足 Lipschitz 条件, 则

(i) 方程(2.6.1)的特征方程 $s_1\varphi+t_1H\varphi=f$ 在 $\mathscr{L}^*$ 内有唯一解

$$\varphi=\frac{s_1+\left(\frac{1}{2}-c\right)t_1}{s_1^2+(1-2c)\,cs_1t_1+\left(c^2-c-\frac{3}{4}\right)t_1^2}f$$

$$-\frac{t_1}{s_1^2+(1-2c)cs_1t+\left(c^2-c-\frac{3}{4}\right)t_1^2}Hf;$$

(ii) 在 $\mathscr{L}^*$ 内, 奇异积分方程(2.6.1)与 Fredholm 方程(2.6.8)等价.

当然定理 2.6.2 也可以用(2.5.10), (2.5.12)等来直接证明之.

§ 2.7 有 B-核和 h-核的奇异积分方程

本节讨论方程

$$L\varphi\equiv p_1\varphi+q_1B_{\gamma_1}\varphi+r_1h_{\gamma_1}\varphi+s_1A\varphi=f,\tag{2.7.1}$$

其中 p_1, q_1, r_1, s_1 为实数, 已给 $f\in\mathscr{L}$, 在 $\mathscr{L}$ 内求解. 由(2.5.30)及(2.5.31), 方程(2.7.1)等价于

$$p\varphi+qB\varphi+rh\varphi+sA\varphi=f,\tag{2.7.2}$$

这里

$$p=p_1-(1-2a)q_1,\ q=q_1,\ r=r_1,\ s=s_1.\tag{2.7.3}$$

先假设 $p-q=p_1-2(1-a)q_1\neq 0$, $(p_1-(1-2a)q_1)^2+r_1^2\neq 0$.

(i) 当 $p+s\neq0$ 时，易知算子

$$M=\frac{p}{p^2+r^2}I-\frac{r^2+pq}{(p-q)(p^2+r^2)}B$$
$$-\frac{r}{p^2+r^2}h+\frac{r^2-ps}{(p+s)(p^2+r^2)}A \tag{2.7.4}$$

是算子 $$L=pI+qB+rh+sA$$

的逆算子，即 $$ML=LM=I,$$

因而方程(2.7.2)在这时有唯一解

$$\varphi=Mf.$$

将(2.7.3)的值代入(2.7.4)，就得到方程(2.7.1)的解为

$$\varphi=\Big[\frac{p_1^2-2(2-3a)p_1q_1+(3-4a)(1-2a)q_1^2-r_1^2(1-2a)}{[p_1-2(1-a)q_1][(p_1-(1-2a)q_1)^2+r^2]}I$$
$$-\frac{r_1^2+p_1q_1-(1-2a)q_1^2}{[p_1-2(1-a)q_1][(p_1-(1-2a)q_1)^2+r_1^2]}B_{\gamma_1}$$
$$-\frac{r_1}{(p_1-(1-2a)q_1)^2+r_1^2}h_{\gamma_1}$$
$$+\frac{r_1^2-p_1s_1+(1-2a)q_1s_1}{(p_1-(1-2a)q_1+s_1)[(p_1-(1-2a)q_1)^2+r_1^2]}A\Big]f. \tag{2.7.5}$$

(ii) 当 $p+s=0$ 时.

① 如果 $p\neq0$，方程为

$$p(I-A)\varphi+qB\varphi+rh\varphi=f. \tag{2.7.6}$$

令

$$(I-A)\varphi=\psi, \tag{2.7.7}$$

则 ψ 应满足方程

$$p\psi+qB\psi+rh\psi=f.$$

由(i)中结论，上述方程有唯一解

$$\psi=\Big(\frac{p}{p^2+r^2}I-\frac{r^2+pq}{(p-q)(p^2+r^2)}B$$
$$-\frac{r}{p^2+r^2}h+\frac{r^2}{p(p^2+r^2)}A\Big)f. \tag{2.7.8}$$

将(2.7.8)代入(2.7.7)，易知当且仅当 $Af=0$ 时，方程(2.7.6)有解，并且解为

$$\varphi=\left(\frac{p}{p^2+r^2}I-\frac{r^2+pq}{(p-q)(p^2+r^2)}B-\frac{r}{p^2+r^2}h+\frac{r^2}{p(p^2+r^2)}A\right)f+c_1, \tag{2.7.9}$$

其中 c_1 为任一实数.

于是方程(2.7.1)有解

$$\begin{aligned}\varphi=\Big[&\frac{p_1^2-2(2-3a)p_1q_1+(3-4a)(1-2a)q_1^2-r_1^2(1-2a)}{[p_1-2(1-a)q_1][(p_1-(1-2a)q_1)^2+r^2]}I\\&-\frac{r_1^2+p_1q_1-(1-2a)q_1^2}{[p_1-2(1-a)q_1][(p_1-(1-2a)q_1)^2+r_1^2]}B_{\gamma_1}\\&-\frac{r_1}{(p_1-(1-2a)q_1)^2+r_1^2}h_{\gamma_1}\\&+\frac{r_1^2}{[p_1-(1-2a)q_1][(p_1-(1-2a)q_1)^2+r_1^2]}A\Big]f+c_1.\end{aligned} \tag{2.7.10}$$

② 如果 $p=0$，方程(2.7.2)为

$$qB\varphi+rh\varphi=f\quad(qr\neq0). \tag{2.7.11}$$

以算子 B 作用之，得 $B(q\varphi+f)=0$，因而

$$\varphi=-\frac{1}{q}(f+U)\quad(U\in\mathscr{B}). \tag{2.7.12}$$

将(2.7.12)代入(2.7.11)，知 U 必须满足方程

$$hU=W, \tag{2.7.13}$$

其中 $W=-\frac{q}{r}f-\frac{q}{r}Bf-hf\in\mathscr{B}$.

用算子 h 作用于(2.7.13)，得

$$U-AU=-hW. \tag{2.7.14}$$

记 $AU=t$，以 $U=-hW+t$ 代入(2.7.13)，利用(2.5.19)及(2.5.28)可知，当且仅当 $AW=0$ 时，方程(2.7.13)在 $\mathscr{B}$ 内有解，

并且它的解是

$$U=-hW+c_1,$$

其中 c_1 为任一实数. 由此可知, 当且仅当 $Af=0$ 时, 方程(2.7.11)在 $\mathscr{L}$ 内有解, 解为

$$\varphi=-\frac{1}{q}(f-hW+c_1)=\left(\frac{1}{q}B-\frac{1}{r}h-\frac{1}{q}A\right)f+c_1', \tag{2.7.15}$$

其中 c_1' 为任一实数.

于是方程(2.7.1)的解为

$$\varphi=\left(\frac{1}{q}B_{\gamma_1}-\frac{1}{r}h_{\gamma_1}-\frac{1}{q}A+(1-2a)I\right)f+c_1'. \tag{2.7.16}$$

于是我们得到

定理 2.7.1 设在方程(2.7.2)中, p, q, r, s 为实数, 且 $p-q\neq 0$, $p^2+r^2\neq 0$, 已给 $f\in\mathscr{L}$, 那末

(i) 当 $p+s\neq 0$ 时, (2.7.2)在 $\mathscr{L}$ 内有唯一解, 解为 $\varphi=Mf$, M 由(2.7.4)所定义;

(ii) 当 $p+s=0$ 时, 则当且仅当 $Af=0$ 时, (2.7.2)在 $\mathscr{L}$ 内有解, 并且如果 $p\neq 0$, 则有解如(2.7.9)所示, 如果 $p=0$, 则解如(2.7.15)所示.

与之等价的定理为

定理 2.7.2 设在方程(2.7.1)中, p_1, q_1, r_1, s_1 为实数, 且 $p_1-2(1-a)q_1\neq 0$, $(p_1-(1-2a)q_1)^2+r_1^2\neq 0$, 已给 $f\in\mathscr{L}$, 那末当

(i) $p_1-(1-2a)q_1+s_1\neq 0$ 时, (2.7.1)在 $\mathscr{L}$ 内有唯一解, 解为(2.7.5)所示;

(ii) $p_1-(1-2a)q_1+s_1=0$ 时, 则当且仅当 $Af=0$ 时, (2.7.1)在 $\mathscr{L}$ 内有解, 并且如果 $p_1\neq(1-2a)q_1$, 则有解如(2.7.10)所示; 如果 $p_1=(1-2a)q_1$, 则解如(2.7.16)所示.

§2.8　一些例外情形

在§2.6, §2.7的讨论中，都有一些例外的情形，如对方程(2.6.3)，当$s^2-t^2=0$时；以及方程(2.7.2)中$p=q$或$p^2+r^2=0$的情形.

在方程(2.6.1)及(2.7.1)也都有相应的例外情况，不过是与(2.6.3)及(2.7.2)的例外情况相对应的，故只讨论(2.6.3)及(2.7.2)的例外情况，读者不难将这些讨论变为对(2.6.1)及(2.7.1)的讨论.

这时要讨论的是下列这些方程：

$$\varphi \pm H\varphi = f, \tag{2.8.1}$$

其中$f\in\mathscr{L}^*$已给，在$\mathscr{L}^*$内求解φ；

$$A\varphi = f, \tag{2.8.2}$$

$$B\varphi = f, \tag{2.8.3}$$

$$B\varphi + sA\varphi = f \quad (s\neq 0), \tag{2.8.4}$$

$$h\varphi = f, \tag{2.8.5}$$

$$h\varphi + sA\varphi = f \quad (s\neq 0), \tag{2.8.6}$$

$$\varphi + B\varphi + rh\varphi - A\varphi = f, \tag{2.8.7}$$

$$\varphi + B\varphi + rh\varphi + sA\varphi = f \quad (s\neq -1). \tag{2.8.8}$$

在(2.8.2)～(2.8.8)诸方程中，已给$f\in\mathscr{L}$，在$\mathscr{L}$内求解φ.

解(2.8.1)

如果方程(2.8.1)在$\mathscr{L}^*$内有解，以算子$I\mp H$作用之，知必须

$$(I\mp H)f = 0. \tag{2.8.9}$$

当f满足(2.8.9)时，任取$\psi\in\mathscr{L}^*$，则

$$\varphi = \frac{1}{2}f + (I\mp H)\psi$$

必为(2.8.1)的解.

解(2.8.2)

如果方程(2.8.2)有解，必须$f=c$为常数；当$f=c$时，任取$\psi\in\mathscr{L}$，则

$$\varphi=c+h\psi+B\psi$$

必为(2.8.2)的解.

解(2.8.3)

如果方程(2.8.3)有解，必须

$$hf=0,\ f+Bf=0. \tag{2.8.10}$$

当f满足(2.8.10)时，任取$v\in\mathscr{B}$，$\psi\in\mathscr{L}$，则

$$\varphi=-f+v+h\psi$$

必为(2.8.3)的解.

解(2.8.4)

如果方程(2.8.4)有解，必须

$$hf=0, \tag{2.8.11}$$

当f满足(2.8.11)时，任取$\psi\in\mathscr{L}$，则

$$\varphi=\frac{1}{s}f+\frac{1+s}{s}Bf+h\psi$$

必为(2.8.4)的解.

解(2.8.5)

如果方程(2.8.5)有解，必须

$$Af=0,\ Bf=0. \tag{2.8.12}$$

当f满足(2.8.12)时，任取$\psi\in\mathscr{L}$，则

$$\varphi=-hf+B\psi$$

必为(2.8.5)的解.

解(2.8.6)

如果方程(2.8.6)有解，必须$f\in\mathscr{B}$，当$f\in\mathscr{B}$时，任取$\psi\in\mathscr{L}$，则

$$\varphi = -hf + \frac{1}{s}Af + B\psi$$

必为(2.8.6)的解.

解(2.8.7)

如果方程(2.8.7)有解,必须 $f\in\mathscr{B}$. 当 $f\in\mathscr{B}$ 时,任取 $\psi\in\mathscr{L}$,则

$$\varphi = \frac{1}{1+r^2}f - \frac{r}{1+r^2}hf + \frac{r^2}{1+r^2}Af + B\psi$$

必为(2.8.7)的解.

解(2.8.8)

如果方程(2.8.8)有解,必须 $f\in\mathscr{B}$, 当 $f\in\mathscr{B}$ 时,任取 $\psi\in\mathscr{L}$,则

$$\varphi = \frac{1}{1+r^2}f - \frac{r}{1+r^2}hf + \frac{r^2-s}{(1+r^2)(1+s)}Af + B\psi$$

必为(2.8.8)的解.

总之,上述诸方程如果有解,解都不是唯一的. 在以后几节所讨论的方程和方程组中,也要出现一些例外情形,将不再赘述.

§2.9 有 B-核和 h-核的奇异积分方程(续)

本节讨论比(2.6.1)、(2.7.1)更为一般的方程. 首先讨论方程

$$pV + rh_\gamma V + KV = W, \tag{2.9.1}$$

其中 p, r 为实数,已给 $W\in\mathscr{B}$, $KV = \omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1} V(u)K(v,u)\dot{u}$, 核 $K(v, u)$是对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件的实值函数. 我们有

定理 2.9.1 如果在 $\mathscr{B}$ 中求解, 则方程(2.9.1)可以化成与之等价的 Fredholm 方程.

证 由于 $h_\gamma = h$, 故(2.9.1)等价于

$$pV+rhV+KV=W. \tag{2.9.2}$$

故只要讨论方程(2.9.2)即可.

以算子 $$M=pI-rh$$

作用于(2.9.2),利用(2.5.19),得到

$$p_1V+K_1V=W_1, \tag{2.9.3}$$

其中 $$p_1=p^2+r^2,\quad W_1=(pI-rh)W\in\mathscr{B},$$

$$K_1V=-r^2AV+(pI-rh)KV$$
$$=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}V(u)K_1(v,u)\dot{u}.$$

应用§2.6中同样的推理,易知 $K_1(v, u)$ 对于 v, u 皆满足 Lipschitz 条件,所以(2.9.3)是 Fredholm 方程.

方程(2.9.3)与(2.9.1)的等价性是显然的,因为以算子

$$M^*=pI+rh$$

作用于(2.9.3),立得(2.9.1).

再考虑方程

$$p_1\varphi+q_1B_{\gamma_1}\varphi+r_1h_{\gamma_1}\varphi+K\varphi=f, \tag{2.9.4}$$

其中 p_1, q_1, r_1 为实数,已给 $f\in\mathscr{L}$, $K\varphi=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)K(v,u)\dot{u}$, 核 $K(v, u)$ 对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件,显然(2.7.1)是(2.9.4)的一个特殊情形.

为了讨论方便,不妨将(2.9.4)改写为

$$p_1\varphi+q_1B_{\gamma_1}\varphi+r_1h_{\gamma_1}\varphi+s_1A\varphi+K_1\varphi=f, \tag{2.9.5}$$

其中 $K_1\varphi=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)K_1(v,u)\dot{u}$, $K_1(v, u)$ 对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件.

如同§2.7中那样,(2.9.4),(2.9.5)等价于

$$p\varphi+qB\varphi+rh\varphi+K\varphi=f \tag{2.9.6}$$

及

$$p\varphi+qB\varphi+rh\varphi+sA\varphi+K_1\varphi=f, \tag{2.9.7}$$

这里 p, q, r, s 由(2.7.3)定义.

定理 2.9.2 如果在方程(2.9.7)中, $p-q\neq 0$, $p+s\neq 0$, $p^2+r^2\neq 0$, 并且在 $\mathscr{L}$ 内求解 φ, 则方程(2.9.7)可以化成与之等价的 Fredholm 方程.

证 用(2.7.4)所示的算子 M 作用于(2.9.7), 得到方程

$$\varphi+K_2\varphi=g, \tag{2.9.8}$$

其中 $g=Mf$, $K_2\varphi=MK_1\varphi=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)K_2(v, u)\dot{u}$, 易知 $K_2(v, u)$ 对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件. 所以 (2.9.8) 是 Fredholm 方程. 用算子

$$L=pI+qB+rh+sA$$

作用于(2.9.8), 立得(2.9.7), 所以(2.9.8)与(2.9.7)等价.

与定理 2.9.2 等价的是

定理 2.9.3 如果在方程(2.9.5)中,

$$p_1\neq 2(1-a)q_1,\quad p_1-(1-2a)q_1+s_1\neq 0,$$
$$(p_1-(1-2a)q_1)^2+r_1^2\neq 0,$$

并在 $\mathscr{L}$ 内求解 φ, 则方程(2.9.5)可以化为与之等价的 Fredholm 方程.

§ 2.10 有 Cauchy 核的奇异积分方程组

考虑方程组

$$P_1\varphi+H_\gamma Q_1\varphi+K\varphi=f, \tag{2.10.1}$$

其中 P_1, Q_1 皆为 m 阶复数方阵, 已给

$$f=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}\in\mathscr{L}^*\ (\text{指每个} f_i\in\mathscr{L}^*,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

$$K=(K_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m},\ K_{ij}\varphi_j=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi_j(u)K_{ij}(v, u)\dot{u}.$$

每个核 $K_{ij}(v, u)$ 皆对 v, u 满足 Lipschitz 条件.

由(2.5.32)，方程(2.10.1)等价于

$$\left[P_1+\frac{1}{2}(1-2c)Q_1\right]\varphi+HQ_1\varphi+K\varphi=f,$$

这里 c 由§2.6中所定义．记

$$P_1+\frac{1}{2}(1-2c)Q_1=P, \quad Q_1=Q,$$

则(2.10.1)等价于

$$P\varphi+HQ\varphi+K\varphi=f. \qquad (2.10.2)$$

我们有

定理 2.10.1 如果在方程(2.10.2)中，P, Q 满足

$$\det\begin{pmatrix} P & Q \\ Q & P \end{pmatrix}\neq 0,$$

并且在 $\mathscr{L}^*$ 内求解 $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots \\ \varphi_m\end{pmatrix}$，则方程组(2.10.2)可以化为与之等价的 Fredholm 方程组．

证 记

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ Q & P \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} R & S \\ S & R \end{pmatrix}.$$

用算子

$$M=RI+SH$$

作用于(2.10.2)，得到

$$\varphi+K_1\varphi=F, \qquad (2.10.3)$$

其中 $F=Mf\in\mathscr{L}^*$, $K_1\varphi=MK\varphi$, $K_1=(K_{ij}^{(1)})_{1<i,j<m}$. 易知

$$K_{ij}^{(1)}\varphi_j=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi_j(u)K_{ij}^{(1)}(v,u)\dot{u}$$

的核 $K_{ij}^{(1)}(v,u)$ 对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件，所以(2.10.3)是 Fredholm 方程组．用算子 $PI+QH$ 作用于(2.10.3)，立得(2.10.2)，所以(2.10.3)与(2.10.2)等价．

与定理 2.10.1 等价的是

定理 2.10.2 如果在方程组(2.10.1)中，P_1, Q_1 满足

$$\det\begin{pmatrix} P_1+\frac{1}{2}(1-2c)Q_1, & Q_1 \\ Q_1, & P_1+\frac{1}{2}(1-2c)Q_1 \end{pmatrix}\neq 0,$$

并且在 $\mathscr{L}^*$ 内求解 $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_m\end{pmatrix}$, 则方程(2.10.1)可化成与之等价的 Fredholm 方程组.

§2.11 有 B-核与 h-核的奇异积分方程组

考虑方程组

$$L\varphi\equiv P_1\varphi+B_{\gamma_1}Q_1\varphi+h_{\gamma_1}R_1\varphi+AS_1\varphi=f, \qquad (2.11.1)$$

其中 P_1, Q_1, R_1, S_1 皆为m阶实数方阵. 已给 $f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}\in\mathscr{L}$, 在 $\mathscr{L}$ 内求解 φ.

由(2.5.30)及(2.5.31), 方程(2.11.1)等价于

$$P\varphi+BQ\varphi+hR\varphi+AS\varphi=f, \qquad (2.11.2)$$

这里

$$P=P_1-(1-2a)Q_1,\quad Q=Q_1,\quad R=R_1,\quad S=S_1.$$

假设

$$\det(P-Q)\neq 0,\ \det\begin{pmatrix}P & R\\ -R & P\end{pmatrix}\neq 0.$$

(i) 如果 $\det(P+S)\neq 0$, 令

$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix}P_2 & Q_2\\ -R_2 & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P & R\\ -R & P\end{pmatrix}^{-1},\\ &Q_3=(R_2R-P_2Q)(P-Q)^{-1},\\ &S_3=-(P_2S+R_2R)(P+S)^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.11.3)$$

则算子

$$M=P_2I+Q_3B+R_2h+S_3A \qquad (2.11.4)$$

是算子
$$L=PI+QB+Rh+SA$$
的左逆，即
$$ML=I.$$
因之，方程(2.11.2)在这时有唯一解
$$\varphi=Mf. \tag{2.11.5}$$

(ii) 如果 $\det(P+S)=0$，用算子 B 作用于(2.11.2)，得到 $B((P-Q)\varphi-f)=0$，即
$$\varphi=(P-Q)^{-1}(f+U)=g+V, \tag{2.11.6}$$
其中
$$U=\begin{pmatrix}U_1\\ \vdots\\ U_m\end{pmatrix}\in\mathscr{B},\quad g=(P-Q^{-1})f,\quad V=(P-Q)^{-1}U\in\mathscr{B}.$$
将(2.11.6)代入(2.11.2)，知 V 必须满足方程组
$$PV+hRV+ASV=F, \tag{2.11.7}$$
其中
$$F=-Qg-BQg-hRg-ASg\in\mathscr{B}.$$
令
$$M^*=P_2I+R_2h,$$
其中 P_2, R_2 满足(2.11.3)．用 M^* 作用于(2.11.7)，得
$$V+(P_2S+R_2R)AV=M^*F, \tag{2.11.8}$$
其中
$$M^*F=-[(P_2Q-R_2R)I+P_2QR+(P_2R+R_2Q)h+(P_2S+R_2R)A]g.$$

记 $AV=C^*=\begin{pmatrix}C_1^*\\ \vdots\\ C_m^*\end{pmatrix}$为一列实数，以
$$V=M^*F-(P_2S+R_2R)C^* \tag{2.11.9}$$
代入(2.11.7)，得到
$$(P_2S+R_2R)[(I+P_2S+R_2R)C^*+(P_2Q+P_2S)(P-Q)^{-1}f]=0.$$
这就表示，如果方程组(2.11.8)有解，所与之 f 必须使得线性方程组

$$(P_2S+R_2R)[(I+P_2S+R_2R)x + (P_2Q+P_2S)(P-Q)^{-1}f]=0 \qquad (2.11.10)$$

有解,其中 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$为一组变元. 反之, 如果方程组(2.11.10)有解, 任取其一组解 $x=C^*$, 则由(2.11.9)所示之 V 必为(2.11.7)的解. 从而(2.11.6)是(2.11.2)的解. 方程组(2.11.2)的解的唯一性, 可如下得知: 即当 $f\equiv 0$ 时, 从(2.11.8)立知 V 为一组常数, 而且必须满足方程

$$(P_2S+R_2R)(I+P_2S+R_2R)V=0.$$

于是得到

定理 2.11.1 在方程组(2.11.2)中, 如果, P, Q, R 满足

$$\det(P-Q)\neq 0, \qquad \det\begin{pmatrix} P & R \\ -R & P \end{pmatrix}\neq 0,$$

那末

(i) 当 $\det(P+S)\neq 0$ 时, (2.11.2)在 $\mathscr{L}$ 内有唯一解, 解如(2.11.5)所示;

(ii) 若 $\det(P+S)=0$, 则当且仅当所与之 f 使得线性方程组(2.11.10)有解时, (2.11.2)在 $\mathscr{L}$ 内有解, 解的形式为 $\varphi=(P-Q)^{-1}f+V$, 其中 V 如(2.11.9)所示, C^* 是(2.11.10)的任一组解.

对于方程组(2.11.1)也有同样的结论, 这时 P_1, Q_1, R_1 满足

$$\det(P_1-2(1-a)Q_1)\neq 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} P_1-(1-2a)Q_1 & R_1 \\ -R_1 & P_1-(1-2a)Q_1 \end{pmatrix}\neq 0,$$

以及 $\det(P_1-(1-2a)Q_1+S_1)\neq 0$ 或 $=0$.

最后, 考虑方程组

$$P_1\varphi+B_{\gamma_1}Q_1\varphi+h_{\gamma_1}R_1\varphi+AS_1\varphi+K\varphi=f, \quad (2.11.11)$$

其中 P_1, Q_1, R_1, S_1 皆为 m 阶实数方阵, 已给 $f=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}\in\mathscr{L}$,

$K=(K_{ij})_{1\le i,j\le m}$, $K_{ij}\varphi_j=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi_j(u)\,K_{ij}(v,\ u)\,\dot{u}$, 每个 $K_{ij}(v,\ u)$ 皆对 v, u 满足 Lipschitz 条件.

由(2.5.30)及(2.5.31), 方程(2.11.11)等价于

$$P\varphi+BQ\varphi+hR\varphi+AS\varphi+K\varphi=f, \qquad (2.11.12)$$

这里 $P=P_1-(1-2a)Q_1$, $Q=Q_1$, $R=R_1$, $S=S_1$.

我们有

定理 2.11.2 如果在 $\mathscr{L}$ 内求解方程组(2.11.12), 则当 P, Q, R, S 满足

$$\det(P-Q)\neq 0,\ \det(P+S)\neq 0,\ \det\begin{pmatrix} P & R \\ -R & P\end{pmatrix}\neq 0$$

时, 可将方程组(2.11.12)化成与之等价的 Fredholm 方程组.

证 用(2.11.4)式所示的算子 M 作用于(2.11.12), 得到 Fredholm 方程组

$$\varphi+K^*\varphi=F, \qquad (2.11.13)$$

其中 $K^*=MK=(K^*_{ij})$, $K^*_{ij}\varphi_j=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi_j(u)\,K^*_{ij}(v,\ u)\,\dot{u}$ 的核 $K^*_{ij}(v,\ u)$ 对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件(i, $j=1$, 2, $\cdots$, m).

由于

$$\det(P_2-Q_2)=\det[P_2-(R_2R-P_2Q)(P-Q)^{-1}]$$
$$=\det(P-Q)^{-1}\neq 0,$$
$$\det(P_2+S_2)=\det[P_2-(P_2S+R_2R)(P+S)^{-1}]$$
$$=\det(P+S)^{-1}\neq 0,$$
$$\det\begin{pmatrix} P_2 & R_2 \\ -R_2 & P_2\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} P & R \\ -R & P\end{pmatrix}^{-1}\neq 0,$$

所以同理可以作出 M 的左逆算子 M^*, 用 M^* 作用于(2.11.13), 得到(2.11.12), 所以(2.11.13)与(2.11.12)等价.

对于方程(2.11.11)也有同样的结果, 只是条件成为

$$\det(P_1-2(1-a)Q_1)\neq 0,\ \det(P_1-(1-2a)Q_1+S_1)\neq 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} P_1-(1-2a)Q_1, & R_1 \\ -R_1, & P_1-(1-2a)Q_1 \end{pmatrix}\neq 0.$$

系 2.11.1 如果在 $\mathscr{L}$ 内求解方程

$$P\varphi+BQ\varphi+hR\varphi+K\varphi=f, \qquad (2.11.14)$$

其中 P, Q, R 为 m 阶实数方阵,且满足

$$\det(P-Q)\neq 0,\ \det\begin{pmatrix} P & R \\ -R & P \end{pmatrix}\neq 0,$$

而

$$f=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}\in\mathscr{L},\ K=(K_{ij})_{1\leq i,j\leq m},$$

$$K_{ij}\varphi_j=\omega_{2n-1}^{-1}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi_j(u)K_{ij}(v,\ u)\dot{u},$$

$K_{ij}(v,\ u)$皆对 v, u 满足 Lipschitz 条件,则可将方程组(2.11.14)化成与之等价的 Fredholm 方程.

事实上,只要将(2.11.14)改写成

$$P\varphi+BQ\varphi+hR\varphi+AS\varphi+K_1\varphi=f,$$

这里 $K_1=K-AS$, 若 K 满足系 2.11.1 中的条件, 则 K_1 也满足, 选取 S, 使 $\det(P+S)\neq 0$, 这是一定能做到的. 于是由定理 2.11.2, 立知系中结论正确.

同样,对于方程组

$$P_1\varphi+B_{\gamma_1}Q_1\varphi+h_{\gamma_2}R_1\varphi+K\varphi=f, \qquad (2.11.15)$$

其中 P_1, Q_1, R_1 为 m 阶实数方阵,且满足

$$\det(P_1-2(1-a)Q_1)\neq 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} P_1-(1-2a)Q_1, & R_1 \\ -R_1, & P_1-(1-2a)Q_1 \end{pmatrix}\neq 0$$

f, K 均满足系 2.11.1 中的条件,则方程组(2.11.15)可化成与之

等价的 Fredholm 方程组.

最后，还要指出四点：

(1) 注意到 H_γ, h_γ 与 B_γ 之间的关系，我们可以将含有 Cauchy 核的常系数奇异积分方程及方程组归化为含有 B-核和 h-核的常系数的奇异积分方程组.

(2) 如果我们把 $\mathscr{L}^*$ 及 $\mathscr{L}$ 看作为定义在特征为零的域上的线性空间，$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{L}$ 的线性子空间，在 $\mathscr{L}^*$ 及 $\mathscr{L}$ 上引进线性算子 H_γ, B_γ, h_γ, A, I, K, 且满足 § 2.5 中的种种关系式，那末从 § 2.6～§ 2.11 的这些结果都可以理解为这样一般的线性空间上的结果，只要我们对线性算子 K 作些必要的要求与说明.

(3) 如果我们不是用(2.2.1)及(2.2.3)所定义的 Cauchy 主值，而用 § 1.8 中所定义的 Cauchy 主值，那末上述这一套奇异积分方程的理论一样能建立起来，或是更一般地，将 (2.2.1) 及 (2.2.3) 及 § 1.8 中所定义的 Cauchy 主值放在同一个奇异积分方程或方程组内，那末上述这些结果都可以得到相应的结果. 如果我们还用另外的办法定义 Cauchy 主值，那末这些理论也可按这个 Cauchy 主值来进行.

(4) 从 § 2.6～§ 2.11 中可以看出，解含有 H_γ, B_γ 及 h_γ 的积分方程及积分方程组时，总是将它归化为等价的含有 H, B 及 h 的积分方程及积分方程组来讨论. 当然，我们也可以利用 § 2.5 中一些有关 H_γ, B_γ, h_γ 的复合公式，直接来解含有 H_γ, B_γ 及 h_γ 的积分方程及积分方程组.

§ 2.12 复超球面上变系数的奇异积分方程

前面所讨论的是复超球面上常系数的奇异积分方程，这些结果，均可推广到变系数的奇异积分方程上去.

复超球面上含 Cauchy 核的变系数的奇异积分方程的形式为

$$S\varphi \equiv a(v)\varphi(v)+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)k_0(v,\ u)H(v,\ \bar{u})\dot{u}=f(v),\tag{2.12.1}$$

其中 $H(v,\bar{u})=(1-v\bar{u}')^{-n}$ 为 Cauchy 核，$a(v)$，$f(v)$，$k_0(v,\ u)$ 皆属于 $\mathscr{L}^*$. (2.12.1)中的积分取 Cauchy 主值

$$\text{v. p.}\int_{u\bar{u}'=1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-v\bar{u}'|>\varepsilon}}.$$

当然，我们可以讨论更一般的 Cauchy 主值，例如用 § 1.6～§ 1.8 中所定义的 Cauchy 主值，但正如在 § 2.6～§ 2.11 中所进行的那样，含有这些 Cauchy 主值的奇异积分方程，还是可以归化到如同(2.12.1)的形式. 同样，含有 B-核及 h-核的变系数的奇异积分方程的形式为

$$a(v)\varphi(v)+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)k_1(v,\ u)B(v,\ u)\dot{u}$$
$$+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)k_2(v,\ u)h(v,\ u)\dot{u}=f(v),\tag{2.12.2}$$

其中

$$B(v,\ u)=H(v,\ \bar{u})+H(u,\ \bar{v})-1,$$
$$h(v,\ u)=\frac{1}{i}(H(v,\ \bar{u})-H(u,\ \bar{v}))$$

为 B-核与 h-核，$a(v)$，$f(v)$，$k_1(v,\ u)$ 和 $k_2(v,\ u)$ 皆属于 $\mathscr{L}$. (2.12.2)中的积分均取 Cauchy 主值. $\text{v. p.}\int_{u\bar{u}'=1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\|1-v\bar{u}'|>\varepsilon}}$.

当然我们可以讨论更一般的 Cauchy 主值，例如我们可以讨论

$$a(v)\varphi(v)+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)k_1(v,\ u)B(v,\ u)\dot{u}$$
$$+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)}\varphi(u)k_2(v,\ u)h(v,\ u)\dot{u}=f(v).$$

如同前面所指出的，这可以归化成(2.12.2)的形式，所以在这一章的以后部分，我们所讨论的 Cauchy 主值都是

$$\text{v. p.} \int_{u\bar{u}'=1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'|>\varepsilon}}$$

这样定义的，而这样定义的 Cauchy 主值的结果，不难推广到更一般的 Cauchy 主值上去。

为了讨论变系数的奇异积分方程(2.12.1)及(2.12.2)，我们需要以下一些引理。

引理 2.12.1 设 $f(u)$ 为 $u\bar{u}'=1$ 上连续函数，且为某一解析函数的边界值，$v\bar{v}'=1$，$w\bar{w}'=1$，则

$$F(v,\ w;f) \equiv \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-v\bar{w}')^n f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}$$

$$= f(v) - f(w). \tag{2.12.3}$$

特别有

$$F(v,\ w;1) = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-v\bar{w}')^n \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n} = 0. \tag{2.12.4}$$

这里(2.12.3)及(2.12.4)中的积分定义为 $\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'|>\varepsilon_1 \\ |1-u\bar{w}'|>\varepsilon_2}}$.

证 由定义知当 $v=w$ 时，(2.12.3)显然成立，所以只讨论 $v\neq w$ 的情形。

取 $0<\rho<1$，$0<r<1$，则由定义，

$$\begin{aligned} &F(v,\ w;f) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \lim_{\substack{\rho\to 1\\ r\to 1}} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma_{\varepsilon_1}(v,u)\cap \Sigma_{\varepsilon_2}(w,u)} \frac{(1-\rho v r\bar{w}')^n f(u)\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-ur\bar{w}')^n} \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \lim_{\substack{\rho\to 1\\ r\to 1}} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{u\bar{u}'=1} - \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)} - \int_{\sigma_{\varepsilon_2}(w,u)} \right) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \lim_{\substack{\rho\to 1\\ r\to 1}} (F_0 - F_1 - F_2), \end{aligned} \tag{2.12.5}$$

这里 $\Sigma_\varepsilon(v,\ u)$ 与 $\sigma_\varepsilon(v,\ u)$ 分别表示 $\{u \mid u\bar{u}'=1,\ |1-v\bar{u}'|>\varepsilon\}$ 及

$\{u|u\bar{u}'=1,\ |1-v\bar{u}'|<\varepsilon\}$.

利用 Cauchy 公式，得

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_2\to0}}\lim_{\substack{\rho\to1\\ r\to1}}F_0=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_2\to0}}\lim_{\substack{\rho\to1\\ r\to1}}2f(\rho v)=2f(v).$$

再看 F_1 的极限值，无妨设已取

$$\varepsilon_1\leqslant\frac{1}{8}|1-v\bar{w}'|^2.$$

这时在 $\sigma_\varepsilon(v, u)$ 上，

$$\begin{aligned}|1-u\bar{w}'|&\geqslant|1-v\bar{w}'|-\sqrt{2}\,|1-v\bar{u}'|^{\frac{1}{2}}\\&\geqslant\frac{1}{2}|1-v\bar{w}'|,\end{aligned}\tag{2.12.6}$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_2\to0}}\lim_{\substack{\rho\to1\\ r\to1}}F_1\\&=\lim_{\varepsilon_1\to0}\lim_{\rho\to1}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n(f(u)-f(v))\dot{u}}{(1-u\bar{w}')^n(1-\rho v\bar{u}')^n}\\&\quad+f(v)\lim_{\varepsilon_1\to0}\lim_{\rho\to1}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n\dot{u}}{(1-v\bar{w}')^n(1-\rho v\bar{u}')^n}\\&=F_{11}+F_{12}.\end{aligned}$$

由(2.12.6)及 $|1-\rho v\bar{u}'|\geqslant\frac{1}{2}|1-v\bar{u}'|$，即得

$$F_{11}=\lim_{\varepsilon_1\to0}O\left(\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}\frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}\right)=0.$$

关于 F_{12}，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n\dot{u}}{(1-u\bar{w}')^n(1-\rho v\bar{u}')^n}\\&=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}\left(\frac{1}{(1-u\bar{w}')^n}-\frac{1}{(1-v\bar{w}')^n}\right)\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n}\\&\quad+\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n}{(1-v\bar{w}')^n}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n}\end{aligned}$$

$$=T_1+T_2. \tag{2.12.7}$$

显然 $\lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\lim\limits_{\rho\to 1} T_2=1$; 另一方面, 由(2.12.6)可知在 $\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)$ 上,

$$\left|\frac{1}{(1-u\overline{w}')^n}-\frac{1}{(1-v\overline{w}')^n}\right|\leqslant\frac{M|(u-v)\overline{w}'|}{|1-v\overline{w}'|^{n+1}}$$

(M 为正的常数).

因而

$$|T_1|\leqslant\frac{M|1-\rho v\overline{w}'|^n}{|1-v\overline{w}'|^{n+1}}\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}\frac{|(u-v)\overline{w}'|\dot{u}}{|1-\rho v\overline{u}'|^n}.$$

由 Lebesgue 定理,

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\lim_{\rho\to 1}T_1=\lim_{\varepsilon_1\to 0}O\left(\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}\frac{\dot{u}}{|1-v\overline{u}'|^{n-\frac{1}{2}}}\right)=0.$$

代入(2.12.7), 即得

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\lim_{\substack{\rho\to 1\\ r\to 1}}F_1=F_{12}=f(v).$$

同理可得

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\lim_{\substack{\rho\to 1\\ r\to 1}}F_2=f(w).$$

综合上述所得, 即得(2.12.3).

引理 2.12.2　设 $v\overline{v}'=1$, $w\overline{w}'=1$, 记

$$\tilde{F}(v, w; 1)\equiv\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\overline{u}'=1}\frac{(1-v\overline{w}')^n\dot{u}}{(1-v\overline{u}')^n(1-w\overline{u}')^n},$$

其定义为

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{\Sigma_{\varepsilon_1}(v,u)\cap\Sigma_{\varepsilon_2}(w,u)},$$

则

$$\tilde{F}(v, w; 1)=\begin{cases}0, & \text{若 } w=v;\\ 2(1-v\overline{w}')^n-\dfrac{(1-v\overline{w}')^n}{(1-w\overline{v}')^n}-1, & \text{若 } w\neq v.\end{cases}$$

证　$w=v$ 时, 这是显然的. 若 $w\neq v$, 且 w 与 v 已任意固定. 取 $0<\rho<1$, $0<r<1$, 则

$$\tilde{F}(v, w; 1)$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \lim_{\substack{\rho\to 1\\ r\to 1}} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma_{\varepsilon_1}(v,u)\cap\Sigma_{\varepsilon_2}(w,u)} \frac{(1-\rho r v\bar{w}')^n \dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n (1-r w\bar{u}')^n}$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \lim_{\substack{\rho\to 1\\ r\to 1}} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{u\bar{u}'=1} - \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)} - \int_{\sigma_{\varepsilon_2}(w,u)} \right)$$

$$= I_0 - I_1 - I_2.$$

易知 $I_0 = 2(1-v\bar{w}')^n$. 另一方面, 设

$$\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{8} |1-v\bar{w}'|^2, \quad \varepsilon_2 \leqslant \frac{1}{8} |1-v\bar{w}'|^2,$$

这时在 $\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)$ 上, $|1-u\bar{w}'| \geqslant \frac{1}{2}|1-v\bar{w}'|$, 在 $\sigma_{\varepsilon_2}(w,u)$ 上, $|1-v\bar{u}'| \geqslant \frac{1}{2}|1-v\bar{w}'|$, 于是

$$I_1 = \lim_{\varepsilon_1\to 0} \lim_{\rho\to 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}}$$

$$\cdot \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)} \left(\frac{1}{(1-w\bar{u}')^n} - \frac{1}{(1-w\bar{v}')^n} \right) \frac{(1-\rho v\bar{w}')^n \dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n}$$

$$+ \lim_{\varepsilon_1\to 0} \lim_{\rho\to 1} \frac{(1-\rho v\bar{w}')^n}{(1-w\bar{v}')^n} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)} \frac{\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n}$$

$$= I_{11} + I_{12}.$$

$$I_2 = \lim_{\varepsilon_2\to 0} \lim_{r\to 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}}$$

$$\cdot \int_{\sigma_{\varepsilon_2}(w,u)} \left(\frac{1}{(1-v\bar{u}')^n} - \frac{1}{(1-v\bar{w}')^n} \right) \frac{(1-r v\bar{w}')^n \dot{u}}{(1-r w\bar{u}')^n}$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2\to 0} \lim_{r\to 1} \frac{(1-r v\bar{w}')^n}{(1-v\bar{w}')^n} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_{\varepsilon_2}(w,u)} \frac{\dot{u}}{(1-r w\bar{u}')^n}$$

$$= I_{21} + I_{22}.$$

与引理 2.12.1 的证明相仿, 可得

$$I_{11}=0,\ I_{12}=\frac{(1-v\bar{w}')^n}{(1-w\bar{v}')^n},\ I_{21}=0,\ I_{22}=1.$$

将这些值代入，即得引理.

由 B, h 的定义，利用引理 2.12.1 及 2.12.2, 可导出

引理 2.12.3 若 $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$, 且 $v\neq w$, 则有

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}B(v,\ u)B(u,\ w)\dot{u}=-B(v,\ w),$$

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}h(v,\ u)h(u,\ w)\dot{u}=1-B(v,\ w)$$

和

$$\int_{u\bar{u}'=1}B(v,\ u)h(u,\ w)\dot{u}=0.$$

引理 2.12.4 若 $v\bar{v}'=1$, $\gamma>0$, $0\leqslant\rho<1$,

$$Q_\rho(v)=\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\mathrm{Re}(1-v\bar{u}'))^\gamma\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^m|1-\rho v\bar{u}'|^{n+1}},$$

当

$$\gamma-1<m<n-1+\gamma;$$

$$R_\rho(v)=\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\mathrm{Re}(1-v\bar{u}'))^\gamma\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^m|1-\rho v\bar{u}'|^n},$$

当

$$\max(1,\ \gamma)<m<n+\gamma.$$

则必存在与 ρ 和 v 无关的正数 M 及 N, 使得

$$Q_\rho(v)\leqslant\frac{M}{(1-\rho)^{m+1-\gamma}},\tag{2.12.8}$$

$$R_\rho(v)\leqslant\frac{N}{(1-\rho)^{m-\gamma}}.\tag{2.12.9}$$

证 先证(2.12.8). 利用酉变换, 可知

$$Q_\rho(v)=\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\mathrm{Re}(1-u_1))^\gamma\dot{u}}{|1-u_1|^m|1-\rho u_1|^{n+1}}$$

$$=\int_{\Sigma_\varepsilon(e_1,u)}+\int_{O_\varepsilon(e_1,u)}=Q_1+Q_2,$$

此处 $e_1=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$.

当 $\rho\to1$ 时, 显然有 $Q_1=O(1)$. 以下估计 Q_2, 记 $u_k=x_k+iy_k$, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 取球坐标: $x_1=\cos\theta_1$, $y_1=\sin\theta_1\cos\theta_2$, $\cdots$, $y_n=$

$\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-1}$, 在 $\sigma_\varepsilon(e_1,\ u)$ 上，有

$$\varepsilon^2\geqslant|1-u_1|^2\geqslant(1-\cos\theta_1)^2>\frac{4\theta_1^4}{\pi^4}.$$

所以

$$Q_2=O\left(\int_0^{\pi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}d\theta_1\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos\theta_1)^{\gamma}\sin^{2n-2}\theta_1\sin^{2n-3}\theta_2\,d\theta_2}{\left\{\begin{array}{l}[(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2]^{\frac{m}{2}}\\ \cdot[(1-\rho\cos\theta_1)^2+\rho^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2]^{\frac{n+1}{2}}\end{array}\right\}}\right)$$

记 $1-\cos\theta_1=a$, $\sin\theta_1=b$, 令 $\cos\theta_2=t$, 则上式右边为

$$O\Bigg(\int_0^{\pi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{b^{2n-2}\,d\theta_1}{a^{m-\gamma}(1-\rho\cos\theta_1)^{n+1}}$$

$$\cdot\int_0^1\frac{dt}{\left[1+\left(\frac{bt}{a}\right)^2\right]^{\frac{m}{2}}\left[1+\left(\frac{\rho bt}{1-\rho\cos\theta_1}\right)^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}\Bigg)$$

$$=O\Bigg(\int_0^{\pi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{b^{2n-2}\,d\theta_1}{a^{m-\gamma}(1-\rho\cos\theta_1)^{n+1}}$$

$$\cdot\int_0^1\frac{dt}{\left[1+\left(\frac{\rho bt}{1-\rho\cos\theta_1}\right)^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}\Bigg).$$

令 $\dfrac{\rho bt}{1-\rho\cos\theta_1}=S$, 可知

$$Q_2=O\left(\int_0^{\pi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\sin^{2n-3}\theta_1\,d\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^{m-\gamma}(1-\rho\cos\theta_1)^{n}}\right).$$

再令
$$r^{-\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}=x,$$

其中
$$r=\frac{1-\rho}{1+\rho},$$

则 $\gamma-1<m<n-1+\gamma$ 时，有

$$Q_2=O\left(\frac{1}{r^{m+1-\gamma}}\int_0^{\infty}\frac{x^{2n-2m-3+2\gamma}\,dx}{(1+x^2)^n}\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{(1-\rho)^{m+1-\gamma}}\right) \quad (\rho\to 1),$$

于是(2.12.8)得证.

再证(2.12.9). 与前同理,有

$$R_\rho(v)=\int_{\Sigma_\varepsilon(\tau_1,u)}+\int_{\sigma_\varepsilon(\theta_1,u)}=R_1+R_2.$$

当 $\rho\to 1$ 时,显然有 $R_1=O(1)$. 而同样可得

$$R_2=O\Big(\int_0^{\pi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{b^{2n-2}d\theta_1}{a^{m-\gamma}(1-\rho\cos\theta_1)^n}\int_0^1\frac{dt}{\left[1+\left(\frac{bt}{a}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}}\Big).$$

令 $\frac{bt}{a}=S$. 因 $m>1$,故有

$$R_2=O\Big(\int_0^{\pi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\sin^{2n-3}\theta_1\,d\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^{m-1-\gamma}(1-\rho\cos\theta_1)^n}\Big).$$

再令 $$\tau^{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}=x,$$

其中 $$\tau=\frac{1-\rho}{1+\rho},$$

则当 $\gamma<m<n+\gamma$ 时,有

$$R_2=O\Big(\frac{1}{\tau^{m-\gamma}}\int_0^\infty\frac{x^{2n-2m-1+2\gamma}dx}{(1+x^2)^n}\Big)$$

$$=O\Big(\frac{1}{(1-\rho)^{m-\gamma}}\Big) \quad (\rho\to 1).$$

这便证明了(2.12.9).

引理 2.12.5 设 $\varphi(u,w)\in\operatorname{Lip}\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$,令

$$\psi(\rho v,w)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n\varphi(u,w)\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}$$

$$(v\bar{v}'=1,\ 0<\rho<1),$$

上式积分是取 Cauchy 主值,记

$$\psi^+(v,w)=\lim_{\rho\to 1}\psi(\rho v,w),$$

则

$$\psi^+(v,w)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-v\bar{w}')^n\varphi(u,w)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}+\varphi(v,w). \tag{2.12.10}$$

上式右端积分的意义为 $\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ |1-v\bar{u}'|>\varepsilon_1\\ |1-u\bar{w}'|>\varepsilon_2}}$.

证　先证 $v\neq w$ 的情形，显然有

$$\begin{aligned}\psi^+(v,w)&=\lim_{\rho\to 1}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\\ &\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{((1-\rho v\bar{w}')^n-(1-\rho v\bar{u}')^n(\varphi(u,w)-\varphi(v,w)))\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}\\ &+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\varphi(u,w)-\varphi(v,w))\dot{u}}{(1-u\bar{w}')^n}\\ &+\varphi(v,w)\lim_{\rho\to 1}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho u\bar{w}')^n\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}\\ &=\lim_{\rho\to 1}L_1(\rho)+L_2+L_3.\end{aligned}$$

由第一章中超球的 Cauchy 积分公式及 Cauchy 型积分的极限值公式，可算得

$$\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-\rho u\bar{v}')^n(1-w\bar{u}')^n}=\frac{1}{(1-\rho w\bar{v}')^n}.$$

因而 $L_3=\varphi(v,w)$. 关于 $\lim\limits_{\rho\to 1}L_1(\rho)$：由

$$|1-\rho v\bar{u}'|\geqslant\frac{1}{2}|1-v\bar{u}'|$$

可知，$L_1(\rho)$ 的被积函数的绝对值在 $\rho\to 1$ 的过程中对 u 一致地小于 $u\bar{u}'=1$ 上的可积函数

$$\frac{M}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}|1-u\bar{w}'|^{n-\frac{1}{2}}}\quad(M\text{ 为正的常数}).$$

由 Lebesgue 定理，

$$\lim_{\rho\to1} L_1(\rho)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}$$

$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{((1-v\bar{w}')^n-(1-v\bar{u}')^n)(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}.$$

于是

$$\psi^+(v,\ w)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}$$

$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{((1-v\bar{w}')^n-(1-v\bar{u}')^n)(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}$$

$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-u\bar{w}')^n}+\varphi(v,\ w).$$

由引理 2.12.1，上式即为(2.12.10)。

再证 $v=w$ 的情形，这只须证明

$$\psi^+(v,\ v)=\varphi(v,\ v).$$

由于

$$\psi(\rho v,\ v)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho)^n(\varphi(u,\ v)-\varphi(v,\ v))\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-u\bar{v}')^n}$$

$$+\varphi(v,\ v)\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho)^n\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-u\bar{v}')^n}$$

$$=Q_1+Q_2.$$

显然有 $Q_2=\varphi(v,\ v)$。当 $\rho\to1$ 时，有

$$Q_1=O\left((1-\rho)^n\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\mathrm{Re}(1-v\bar{u}')^{\frac{\alpha}{2}})\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^n|1-\rho v\bar{u}'|^n}\right).$$

由(2.12.9)$\left(\text{在(2.12.9)中取 } m=n,\ \gamma=\frac{\alpha}{2}\right)$，即得

$$Q_1=O((1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}).$$

从而(2.12.10)得证。

引理 2.12.6 设 $\varphi(u,\ w)\in\mathrm{Lip}\,\alpha,\ 0<\alpha\leqslant1$，令

$$\tilde{\psi}(\rho v,\ w)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n\varphi(u,\ w)\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-w\bar{u}')^n}$$

$$(0<\rho<1),$$

上式积分取 Cauchy 主值, 记

$$\tilde{\psi}^{+}(v,\ w)=\lim_{\rho\to1}\tilde{\psi}(\rho v,\ w),$$

则

$$\tilde{\psi}^{+}(v,\ w)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-v\bar{w}')^{n}(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n}(1-w\bar{u}')^{n}}$$
$$+[2(1-v\bar{w}')^{n}-1]\varphi(v,\ w). \tag{2.12.11}$$

证　先证 $v\neq w$ 的情形, 显然有

$$\tilde{\psi}(\rho v,\ w)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}$$
$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{((1-\rho v\bar{w}')^{n}-(1-\rho v\bar{u}')^{n})(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^{n}(1-w\bar{u}')^{n}}$$
$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-w\bar{u}')^{n}}$$
$$+\varphi(v,\ w)\tilde{F}(\rho v,\ w;1), \tag{2.12.12}$$

其中　$\tilde{F}(\rho v,\ w;1)=\dfrac{2}{\omega_{2n-1}}\displaystyle\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho v\bar{w}')^{n}\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^{n}(1-w\bar{u}')^{n}},$

上式中积分是取 Cauchy 主值. 取 $0<r<1$, 由于

$$\lim_{\rho\to1}\tilde{F}(\rho v,\ w;1)=\lim_{\rho\to1}\lim_{s\to0}\lim_{r\to1}\frac{2(1-\rho rv\bar{w}')^{n}}{\omega_{2n-1}}$$
$$\cdot\Big[\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^{n}(1-rw\bar{u}')^{n}}$$
$$-\int_{\sigma_{s}(w,u)}\Big(\frac{1}{(1-\rho v\bar{u}')^{n}}-\frac{1}{(1-\rho v\bar{w}')^{n}}\Big)\frac{\dot{u}}{(1-rw\bar{u}')^{n}}$$
$$-\frac{1}{(1-\rho v\bar{w}')^{n}}\int_{\sigma_{s}(w,u)}\frac{\dot{u}}{(1-rw\bar{u}')^{n}}\Big]$$
$$=J_{0}-J_{1}-J_{2}.$$

与引理 2.12.1 的证明同理, 可算出

$$J_{0}=2(1-v\bar{w}')^{n},\quad J_{1}=0,\quad J_{2}=1.$$

所以　$$\lim_{\rho\to1}\tilde{F}(\rho v,\ w;1)=2(1-v\bar{w}')^{n}-1.$$

在(2.12.12)中令 $\rho\to1$, 由 Lebesgue 定理, 并将上式代入, 便得

$$\tilde{\psi}^+(v,\ w)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}$$

$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{((1-v\bar{w}')^n-(1-v\bar{u}')^n)(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ \bar{w}))\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-w\bar{u}')^n}$$

$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-w\bar{u}')^n}$$

$$+[2(1-v\bar{w}')^n-1]\varphi(v,\ w).$$

利用引理 2.12.2, 不难变上式为

$$\tilde{\psi}^+(v,\ w)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-v\bar{w}')^n\varphi(u,\ w)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-w\bar{u}')^n}$$

$$+\varphi(v,\ w)\frac{(1-v\bar{w}')^n}{(1-w\bar{v}')^n},$$

即(2.12.11)。

再证 $v=w$ 的情形. 要证明

$$\tilde{\psi}^+(v,\ v)=-\varphi(v,\ v).$$

证法与引理 2.12.5 的证明的后半部分一样, 只须注意到

$$\lim_{\rho\to1}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho)^n\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-v\bar{u}')^n}=-1$$

即可.

引理 2.12.7 设 $\varphi(u)\in\mathrm{Lip}\,\alpha,\ 0<\alpha\leqslant1,\ 0\leqslant\rho<1,\ v\bar{v}'=1,$ $w\bar{w}'=1$, 记

$$S(\rho v,\ w)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n(\varphi(u)-\varphi(w))\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n},$$

则存在与 v 及 w 无关的正数 K_1, K_2 与 K, 使当 $v\neq w$ 时, 有估计式

$$|S(\rho v,\ w)|\leqslant K_1|1-\rho v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}+K_2\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{4}}}. \tag{2.12.13}$$

当 $v=w$ 时, 有估计式

$$|S(\rho v,\ v)|\leqslant K(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.12.14}$$

证 当 $v=w$ 时，

$$|S(\rho v,\ w)|\leqslant K_0(1-\rho)^n\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\mathrm{Re}(1-v\bar{u}'))^{\frac{\alpha}{2}}\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^n|1-\rho v\bar{u}'|^n},$$

其中 K_0 为正的常数. 在(2.12.9)中令 $m=n,\gamma=\frac{\alpha}{2}$, 得(2.12.14).

再考虑 $v\neq w$ 的情形. 显然只需讨论 $|1-v\bar{w}'|$ 很小的情形.

取 $\varepsilon=2\sqrt{2}\,|1-v\bar{w}'|^{\frac{1}{2}}$, 而

$$S(\rho v,\ w)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\left(\int_{\Sigma_\varepsilon(v,u)}+\int_{\sigma_\varepsilon(v,u)}\right)=I_1+I_2.$$

因为 $|1-v\bar{w}'|\leqslant 2|1-\rho v\bar{w}'|$, 并因在 $\Sigma_\varepsilon(v,\ u)$ 上,

$$|1-u\bar{w}'|\geqslant\sqrt{2}\,|1-v\bar{w}'|^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$|I_1|\leqslant M_1\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2}}}\int_{\Sigma_\varepsilon(v,u)}\frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^n}$$

$$\leqslant M_2\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}.$$

上式中的 M_1 与 M_2 皆为正的常数, 下面的 M_3 至 M_{18} 皆为正的常数, 不另声明.

取 $\delta=\frac{1}{16}|1-v\bar{w}'|$, 而

$$I_2=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\left(\int_{\sigma_\varepsilon(v,u)-\sigma_\delta(v,u)}+\int_{\sigma_\delta(v,u)}\right)=J_1+J_2.$$

因在 $\sigma_\varepsilon(v,\ u)-\sigma_\delta(v,\ u)$ 上有 $|1-\rho v\bar{u}'|\geqslant\frac{1}{32}|1-v\bar{w}'|$, 并因在 $\sigma_\varepsilon(v,\ u)$ 上有 $|1-u\bar{w}'|\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon$, 所以

$$|J_1|\leqslant M_3\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^n}\int_{\sigma_{3\varepsilon/2}(w,u)}\frac{\dot{u}}{|1-w\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\leqslant M_4\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{4}}}.$$

取 $$\delta_1=\frac{1}{8}|1-v\bar{w}'|^2,$$

而 $$J_2=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\left(\int_{\sigma_{\delta_1}(v,u)}+\int_{\sigma_\delta(v,u)-\sigma_{\delta_1}(v,u)}\right)=P_1+P_2.$$

将 P_1 写成

$$\begin{aligned}P_1=&\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_{\delta_1}(v,u)}\frac{(\varphi(u)-\varphi(v))\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}\\&+\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n(\varphi(v)-\varphi(w))}{\omega_{2n-1}}\\&\cdot\int_{\sigma_{\delta_1}(v,u)}\frac{1}{(1-\rho v\bar{u}')^n}\left(\frac{1}{(1-u\bar{w}')^n}-\frac{1}{(1-v\bar{w}')^n}\right)\dot{u}\\&+\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n(\varphi(v)-\varphi(w))}{\omega_{2n-1}(1-v\bar{w}')^n}\int_{\sigma_{\delta_1}(v,u)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n}\\=&Q_1+Q_2+Q_3.\end{aligned}$$

因在 $\sigma_{\delta_1}(v,\ u)$ 上 $|1-u\bar{w}'|\geqslant\frac{1}{2}|1-v\bar{w}'|$，所以

$$\begin{aligned}|Q_1|&\leqslant M_5\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^n}\int_{\sigma_{\delta_1}(v,u)}\frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}\\&\leqslant M_6\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\alpha}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|Q_2|&\leqslant M_7\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{2}}}{|1-v\bar{w}'|^{n+1}}\int_{\sigma_{\delta_1}(v,u)}\frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{1}{2}}}\\&\leqslant M_8\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}.\end{aligned}$$

显然 $$\left|\int_{\sigma_{\delta_1}(v,u)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n}\right|\leqslant C\quad（常数）.$$

所以 $$|Q_3|\leqslant M_9\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}.$$

因此 $$|P_1|\leqslant M_{10}\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}.$$

最后考虑 P_2. 记 $\Omega=\sigma_\delta(v,u)-\sigma_{\delta_1}(v,u)$. 当

$$P_2=\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n}{\omega_{2n-1}}\int_\Omega\frac{(\varphi(u)-\varphi(v))\dot{u}}{(1-u\bar{w}')^n(1-\rho v\bar{u}')^n}+\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n(\varphi(v)-\varphi(w))}{\omega_{2n-1}}\int_\Omega\frac{\dot{u}}{(1-u\bar{w}')^n(1-\rho v\bar{u}')^n}$$

$$=R_1+R_2.$$

显然 $$|R_1|\leqslant M_{11}|1-\rho v\bar{w}'|^n\int_\Omega\frac{\dot{u}}{|1-u\bar{w}'|^n|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}.$$

用一酉变换, 同时将 v 与 w 分别变为 $v=e_1$ 与 $w=(w_1,w_2,\cdots,0)$ 且 $w_2=\sqrt{1-|w_1|^2}\geqslant0$. 从而在 $\sigma_\delta(v,u)$ 上有

$$\begin{aligned}|1-w\bar{u}'|&\geqslant|1-w_1|-|w_1||1-u_1|-|w_2||u_2|\\&\geqslant\frac{15}{16}|1-w_1|-2\sqrt{(1-|w_1|)(1-|u_1|)}\\&>\frac{1}{3}|1-w_1|=\frac{1}{3}|1-e_1\bar{w}'|.\end{aligned}\tag{2.12.15}$$

所以

$$\begin{aligned}|R_1|&\leqslant3^nM_{11}\left|\frac{1-\rho v\bar{w}'}{1-v\bar{w}'}\right|^n\int_{\sigma_\delta(v,u)}\frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}\\&\leqslant M_{12}\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}.\end{aligned}$$

再看 R_2, 由于 $\varphi(u)\in\mathrm{Lip}\,\alpha(0<\alpha\leqslant1)$ 及 (2.12.15) 可得

$$|R_2|\leqslant M_{13}\frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}\lambda(\delta_1,\delta),\tag{2.12.16}$$

其中 $$\lambda(\delta_1,\delta)=\int_\Omega\frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^n}.$$

无妨设 $v=e_1$, 取球坐标, 由 $\delta_1\leqslant|1-u_1|\leqslant\delta$ 可知

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}\leqslant\theta_1\leqslant\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$\lambda(\delta_1, \delta)$

$$\leqslant M_{14}\int_{\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}}^{\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} d\theta_1\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n-2}\theta_1\sin^{2n-3}\theta_2 d\theta_2}{[(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2]^{\frac{n}{2}}}$$

$$\leqslant M_{15}\int_{\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}}^{\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\sin^{2n-3}\theta_1 d\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^{n-1}}$$

$$\leqslant M_{16}\int_{\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}}^{\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{d\theta_1}{\theta_1}$$

$$=M_{16}\left(\log 2\pi+\frac{3}{2}\log|1-v\bar{w}'|^{-1}\right).$$

将上式代入(2.12.16)中，得到

$$|R_1|\leqslant M_{17}\frac{|1-\rho v\bar{u}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}\log|1-v\bar{w}'|^{-1}.$$

因此 $$|P_2|\leqslant M_{18}\frac{|1-\rho v\bar{u}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}\log|1-v\bar{w}'|^{-1}.$$

综上所述，就证明了(2.12.13).

引理 2.12.8 设 $\varphi(u)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0\leqslant\alpha<1$, $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$, 记

$$\xi(v, w)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-v\bar{w}')^n\varphi(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}, \tag{2.12.17}$$

$$\tilde{\xi}(v, w)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-v\bar{w}')^n(\varphi(u)-\varphi(v))\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-w\bar{u}')^n}. \tag{2.12.18}$$

在(2.12.17)中积分定义为

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_2\to0}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ |1-v\bar{u}'|\geqslant\varepsilon_1\\ |1-u\bar{w}'|\geqslant\varepsilon_2}},$$

在(2.12.18)中积分定义为

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_2\to0}}\int_{\Sigma_{\varepsilon_1}(v,u)\cap\Sigma_{\varepsilon_2}(w,u)}.$$

则当 $|1-v\bar{w}'|\to 0$ 时，对 $v\bar{v}'=1$，$w\bar{w}'=1$ 上的 v 与 w，一致地有

$$\xi(v,\ w)=O(|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}) \qquad (2.12.19)$$

和

$$\tilde{\xi}(v,\ w)=O(|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}). \qquad (2.12.20)$$

证　先证(2.12.19)．取 $0<\rho<1$，$0<r<1$，有

$$\xi(v,\ w)=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\lim_{\substack{\rho\to 1\\ r\to 1}}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\left(\int_{u\bar{u}'=1}-\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}-\int_{\sigma_{\varepsilon_2}(w,u)}\right)$$

$$=T_0-T_1-T_2.$$

对任意固定的 v 与 w，$v\neq w$，无妨设 ε_1 与 ε_2 均小于 $\frac{1}{8}|1-v\bar{w}'|^2$，与引理 2.12.1 之证明同样道理，可知

$$T_1=T_{11}+T_{12}+T_{13},$$

其中

$$T_{11}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\lim_{\rho\to 1}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\cdot\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n(\varphi(u)-\varphi(v))\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}=0,$$

$$T_{12}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\lim_{\rho\to 1}\frac{2\varphi(v)}{\omega_{2n-1}}\cdot\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}\left(\frac{1}{(1-u\bar{w}')^n}-\frac{1}{(1-v\bar{w}')^n}\right)\frac{(1-\rho v\bar{w}')^n\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n}$$

$$=0,$$

$$T_{13}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\lim_{\rho\to 1}\frac{2\varphi(v)}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v,u)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n}=\varphi(v).$$

因而 $T_1=\varphi(v)$．同理 $T_2=\varphi(w)$．另一方面，有

$$T_0=\lim_{\substack{\rho\to 1\\ r\to 1}}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho vr\bar{w}')^n(2\varphi(u)-\varphi(v)-\varphi(w))\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-ru\bar{w}')^n}$$

$$+\varphi(v)+\varphi(w),$$

所以

$$\xi(v,\ w)=\lim_{\rho\to 1}S(\rho v,\ w)+\lim_{r\to 1}T(v,\ rw),\quad (2.12.21)$$

其中 $S(\rho v,\ w)$ 如引理 2.12.7 中所定义，而

$$T(v,\ rw)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-rv\bar{w}')^n(\varphi(u)-\varphi(v))\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-ru\bar{w}')^n}.$$

由(2.12.13)，立得

$$\lim_{\rho\to 1}|S(\rho v,\ w)|\leqslant M|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}.$$

M 为一正的常数．与证明引理 2.12.7 同理，可得

$$\lim_{r\to 1}|T(v,\ rw)|\leqslant N|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}},$$

N 亦为一正的常数．将上述二不等式代入(2.12.21)，并取 $K=2\max(M,\ N)$，即得，对一切 $v\bar{v}'=1,\ w\bar{w}'=1$，有

$$|\xi(v,\ w)|\leqslant K|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}.$$

于是(2.12.19)得证．

再来证(2.12.20)．与上面一样，有

$$\tilde{\xi}(v,\ w)=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\lim_{\substack{\rho\to 1\\ r\to 1}}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\left(\int_{u\bar{u}'=1}-\int_{\sigma_{\varepsilon_2}(v,u)}-\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(w,u)}\right)$$
$$=\tilde{T}_0-\tilde{T}_1-\tilde{T}_2.$$

可算出 $\tilde{T}_1=0,\ \tilde{T}_2=0$，因而

$$\xi(v,\ w)=\lim_{r\to 1}\tilde{T}(v,\ rw),$$

此处

$$\tilde{T}(v,\ rw)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-rv\bar{w}')^n(\varphi(u)-\varphi(v))\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-rw\bar{u}')^n}.$$

按照引理 2.12.7 的证法，对 $\tilde{T}(u,\ rw)$ 可得到同样的估计式，这样就可得到(2.12.20)．

从引理 2.12.8 可立得

引理 2.12.9　设 $\varphi(u)\in \mathrm{Lip}\,\alpha,\ 0<\alpha\leqslant 1$，则当 $|1-v\bar{w}'|\to 0$

时，奇异积分

$$\int_{u\bar{u}'=1}(\varphi(u)-\varphi(v))B(v,\ u)B(u,\ w)\dot{u},$$

$$\int_{u\bar{u}'=1}(\varphi(u)-\varphi(v))h(v,\ u)h(u,\ w)\dot{u}$$

与
$$\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)B(v,\ u)h(u,\ w)\dot{u},$$

$$\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)h(v,\ u)B(u,\ w)\dot{u}$$

对 $v\bar{v}'=1,\ w\bar{w}'=1$ 的 v 与 w 均一致地为 $O(|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}-n})$.

§2.13 置换公式

定理 2.13.1 设 $\varphi(u,\ w)\in\mathrm{Lip}\,\alpha,\ 0<\alpha\leqslant1,\ \psi(\rho v,\ w)$ 与 $\psi^+(v,\ w)$ 以及 $\tilde{\psi}(\rho v,\ w)$ 与 $\tilde{\psi}^+(v,\ w)$ 分别由引理 2.12.5 及引理 2.12.6 中所定义，$0<\rho<1$. 则

$$\lim_{\rho\to1}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{(\psi(\rho v,\ w)-\psi^+(v,\ w))\dot{w}}{(1-\rho v\bar{w}')^n}=0,\tag{2.13.1}$$

$$\lim_{\rho\to1}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{(\tilde{\psi}(\rho v,\ w)-\tilde{\psi}^+(v,\ w))\dot{w}}{(1-\rho v\bar{w}')^n}=0.\tag{2.13.2}$$

证 以下只证(2.13.1)，至于(2.13.2)可同理证明之.

先证对任意固定的 $\delta>0$，当 $\rho\to1$ 时，估计式

$$\frac{d\psi(\rho v,\ w)}{d\rho}=O((1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}-1})\tag{2.13.3}$$

对所有适合 $v\bar{v}'=1,\ w\bar{w}'=1$ 及 $|1-v\bar{w}'|\geqslant\delta$ 的 v 与 w 一致地成立.

事实上，从

$$\psi(\rho v,\ w)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}$$

$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{((1-\rho v\bar{w}')^n-(1-\rho v\bar{u}')^n)(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}$$

$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-u\bar{w}')^n}+\varphi(v,\ w),$$

可以算出

$$\frac{d\psi(\rho v,\ w)}{d\rho}=\frac{2n}{\omega_{2n-1}}$$

$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho v\bar{w}')^{n-1}v\,\overline{(u-w)}'(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-u\bar{w}')^n(1-\rho v\bar{u}')^{n+1}}.$$

对已经给定的 $\delta>0$, 取 $\varepsilon=\frac{1}{8}\delta^2$, 于是

$$\frac{d\psi(\rho v,\ w)}{d\rho}=\frac{2n}{\omega_{2n-1}}\left(\int_{\Sigma_\varepsilon(v,u)}+\int_{\sigma_\varepsilon(v,u)}\right)=I_1+I_2.$$

因在 $\Sigma_\varepsilon(v,\ u)$上,当 ρ 充分靠近 1 时, $|1-\rho v\bar{u}'|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$,所以存在一仅与 δ 及 $\varphi(u,\ w)$有关的正数 M_1, 使得$|I_1|\leqslant M_1$; 而在 $\sigma_\varepsilon(v,\ u)$上, 因有$|1-u\bar{w}'|\geqslant\frac{\delta}{2}$, 所以存在一仅与 δ 及 $\varphi(u,\ w)$有关的正数 M_2,使得

$$|I_2|\leqslant M_2\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\mathrm{Re}(1-v\bar{u}'))^{\frac{\alpha}{2}}\dot{u}}{|1-\rho v\bar{u}'|^{n+1}}.$$

由(2.12.8),取 $m=0$, $\gamma=\frac{\alpha}{2}$,当 $1-\rho$ 充分小时,有

$$|I_2|\leqslant M_3((1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}-1}),$$

M_3 为正的常数,因此(2.13.3)得证.

再证:对任意固定的 $\delta>0$,存在一仅与 δ 及 $\varphi(u,\ w)$有关的正数 C,使当 $\rho\to1$ 时,估计式

$$|\psi(\rho v,\ w)-\psi^+(v,\ w)|\leqslant C(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}} \qquad (2.13.4)$$

对所有适合 $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$, $|1-v\bar{w}'|\geqslant\delta$ 的 δ 与 w 一致地成立.

事实上,对于 $0<\rho_1<\rho_2<1$, 显然有

$$\psi(\rho_2 v, w)-\psi(\rho_1 v, w)=\int_{\rho_1}^{\rho_2} d\psi(\rho v, w).$$

由(2.13.3)，存在一仅与 δ 及 $\varphi(u,w)$ 有关的正数 M，使当 $|1-v\bar{w}'|\geqslant\delta$ 时，恒有

$$|\psi(\rho_2 v, w)-\psi(\rho_1 v, w)|\leqslant M\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{d\rho}{(1-\rho)^{1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

当 $\rho_2\leqslant\frac{1+\rho_1}{2}$ 时，$1-\rho_2\geqslant\rho_2-\rho_1$，于是

$$\begin{aligned}&|\psi(\rho_2 v, w)-\psi(\rho_1 v, w)|\\&\leqslant\frac{M}{(1-\rho_2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho\leqslant M(\rho_2-\rho_1)^{\frac{\alpha}{2}};\end{aligned}$$

当 $\rho_2>\frac{1+\rho_1}{2}$ 时，$1-\rho_1<2(\rho_2-\rho_1)$，于是

$$\begin{aligned}&|\psi(\rho_2 v, w)-\psi(\rho_1 v, w)|\\&\leqslant\frac{2M}{\alpha}\left[(1-\rho_1)^{\frac{\alpha}{2}}-(1-\rho_2)^{\frac{\alpha}{2}}\right]\\&\leqslant\frac{2M}{\alpha}(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}<\frac{2^{1+\frac{\alpha}{2}}M}{\alpha}(\rho_2-\rho_1)^{\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

记 $C=\frac{2^{1+\frac{\alpha}{2}}M}{\alpha}$，则

$$|\psi(\rho_2 v, w)-\psi(\rho_1 v, w)|\leqslant C(\rho_2-\rho_1)^{\frac{\alpha}{2}}$$

对所有适合 $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$, $|1-v\bar{w}'|\geqslant\delta$ 的 v 与 w 一致地成立。在上式中令 $\rho_2\to1$，并改记 $\rho_1=\rho$，即得(2.13.4)。

现在来证(2.13.1)。记

$$J(\rho)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{(\psi(\rho v, w)-\psi^+(v, w))\dot{w}}{(1-\rho v\bar{w}')^n}.$$

显然

$$|J(\rho)|\leqslant\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{|\psi(\rho v, w)-\psi^+(v, w)|\dot{w}}{|1-\rho v\bar{w}'|^n}$$

$$=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\left(\int_{\Sigma_{\delta_1}(v,w)}+\int_{\sigma_{\delta_1}(v,w)}\right)$$

$$=J_1(\rho)+J_2(\rho).$$

先看 $J_2(\rho)$ 与 δ_1 的关系，$\psi^+(v,w)$ 已有表达式(2.12.10)，而

$\psi(\rho v, w)$

$$=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\overline{u}'=1}\frac{(1-\rho v\overline{w}')^n(\varphi(u,w)-\varphi(w,w))\dot{u}}{(1-\rho v\overline{u}')^n(1-u\overline{w}')^n}$$

$$+\varphi(w,w).$$

若记 $\varphi(u,w)=\varphi(u)$，并采用引理 2.12.7 及引理 2.12.8 的符号，则得出

$$|\psi(\rho v,w)-\psi^+(v,w)|$$

$$\leqslant 2|S(\rho v,w)|+|\varphi(w)-\varphi(v)|$$

$$+|\xi(v,w)|.$$

由引理 2.12.7 与引理 2.12.8 知，存在正的常数 M_1、M_2 与 M，对一切 $v\overline{v}'=1$，$w\overline{w}'=1$，$v\neq w$ 的 v 与 w，恒有

$$|\psi(\rho v,w)-\psi^+(v,w)|$$

$$\leqslant M_1|1-\rho v\overline{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}+M_2\frac{|1-\rho v\overline{w}'|^n}{|1-v\overline{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}+M_3|1-v\overline{w}'|^{\frac{\alpha}{4}},$$

将上式代入 $J_2(\rho)$ 中，便有

$$J_2(\rho)\leqslant M_4\int_{\sigma_{\delta_1}(v,w)}\frac{\dot{w}}{|1-v\overline{w}'|^{n-\frac{\alpha}{4}}}\leqslant M_5\delta_1^{\frac{\alpha}{4}},$$

其中 M_4 与 M_5 皆为正的常数.

于是，任给 $\varepsilon>0$，可先取定一适合 $M_5\delta_1^{\frac{\alpha}{4}}<\frac{\varepsilon}{2}$ 的正数 δ_1，即有

$$J_2(\rho)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由(2.13.4)，对于适合 $|1-v\overline{w}'|\geqslant\delta_1$ 的 v 与 w，必存在一仅与 δ_1 及 $\varphi(u,w)$ 有关的正数 C，使得

$$J_1(\rho)\leqslant\frac{2C(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}}{\omega_{2n-1}}\int_{\Sigma_{\delta_1}(v,w)}\frac{\dot{w}}{|1-v\bar{w}'|^n}$$

$$<\frac{2C(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}}{\delta_1^n}.$$

因此，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在一适合 $\frac{C\delta^{\frac{\alpha}{2}}}{\delta_1^n}<\frac{\varepsilon}{2}$ 的 $\delta>0$，使当 $0<1-\rho<\delta$ 时，有

$$J_1(\rho)<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而 $|J(\rho)|<\varepsilon$。即(2.13.1)得证。

定理 2.13.2 (Poincaré-Bertrand 公式)　若 $\varphi(u,w)\in\mathscr{L}^*$，则

$$\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{u\bar{u}'=1}H(v,\bar{u})\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(u,w)H(u,\bar{w})\dot{w}$$

$$=\varphi(v,v)+\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}$$

$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u,w)H(v,\bar{u})H(u,\bar{w})\dot{u}.\tag{2.13.5}$$

(2.13.5)的左端的两层积分均取主值，其右端的第二项亦可为

$$\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}H(v,\bar{w})\dot{w}$$

$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\varphi(u,w)H(v,\bar{u})H(u,\bar{w})}{H(v,\bar{w})}\dot{u},\tag{2.13.6}$$

它的内层积分的定义是

$$\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\varphi(u,w)H(v,\bar{u})H(u,\bar{w})\dot{u}}{H(v,\bar{w})}=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_2\to0}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ |1-v\bar{u}'|>\varepsilon_1\\ |1-u\bar{w}'|>\varepsilon_2}}.\tag{2.13.7}$$

据引理 2.12.8，若 $\varphi(u,w)\in\operatorname{Lip}\alpha$，$0<\alpha\leqslant1$，则当 $|1-v\bar{w}'|$

$\to 0$ 时，积分(2.13.7)对 $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$ 的 v 与 w 一致地为

$$O(|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}),$$

所以(2.13.6)的外层积分是一通常积分.

证 先在 $z\bar{z}'<1$ 内构造两个函数

$$\Phi(z)=\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\varphi(u,\ w)\dot{w}}{(1-u\bar{w}')^n}$$

和

$$\Psi(z)$$
$$=\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\varphi(u,\ w)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n},$$

上二式的二层积分均取主值.

任意固定 z, 命

$$\Phi(z)=\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}\left(\int_{\Sigma_\varepsilon(u,w)}+\int_{\sigma_\varepsilon(u,w)}\right)$$
$$=\Phi_1+\Phi_2,$$

$$\Psi(z)=\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\left(\int_{\Sigma_\varepsilon(w,u)}+\int_{\sigma_\varepsilon(w,u)}\right)$$
$$=\Psi_1+\Psi_2,$$

其中 Φ_2 与 Ψ_2 的内层积分均取主值，即

$$\text{v. p.}\int_{\sigma_\varepsilon}=\lim_{\substack{\delta\to 0\\(\delta<\varepsilon)}}\int_{\sigma_\varepsilon-\sigma_\delta}.$$

由 $\Phi_1=\Psi_1$ 知

$$|\Phi-\Psi|\leqslant|\Phi_2|+|\Psi_2|.$$

注意到

$$|\Phi_2|\leqslant\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{|1-z\bar{u}'|^n}$$
$$\cdot\left(\int_{\sigma_\varepsilon(u,w)}\frac{|\varphi(u,\ w)-\varphi(w,\ w)|\dot{w}}{|1-u\bar{w}'|^n}\right.$$
$$\left.+\left|\varphi(w,\ w)\int_{\sigma_\varepsilon(u,w)}\frac{\dot{w}}{(1-u\bar{w}')^n}\right|\right).$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$\int_{\sigma_\varepsilon(u,w)}\frac{|\varphi(u,w)-\varphi(w,w)|\dot{w}}{|1-u\overline{w}'|^n}=O(\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}),$$

并且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\text{v. p.}\int_{\sigma_\varepsilon(u,w)}\frac{\dot{w}}{(1-u\overline{w}')^n}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\substack{\delta\to 0\\(\delta<\varepsilon)}}\lim_{\substack{\rho\to 1\\(\rho<1)}}\int_{\sigma_\varepsilon-\sigma_\delta}\frac{\dot{w}}{(1-\rho u\overline{w}')^n}=0,$$

所以 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Phi_2=0$. 同理 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Psi_2=0$. 于是

$$\Phi(z)=\Psi(z).$$

因此，若用 $\Phi^+(v)$ 与 $\Psi^+(v)$ 分别表示 $\Phi(z)$ 与 $\Psi(z)$ 当 $z=\rho v(0<\rho<1,\ v\overline{v}'=1)$ 趋向 v 时的极限值，则应有

$$\Phi^+(v)=\Psi^+(v). \tag{2.13.8}$$

由第一章 § 1.5 的结果，知 $\int_{w\overline{w}'=1}\frac{\varphi(u,w)\dot{w}}{(1-u\overline{w}')^n}\in\mathscr{L}^*$ 以及超球的 Cauchy 型积分的极限值公式，可得

$$\Phi^+(v)=\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{u\overline{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-v\overline{u}')^n}\int_{w\overline{w}'=1}\frac{\varphi(u,w)\dot{w}}{(1-u\overline{w}')^n}$$

$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}\frac{\varphi(v,w)\dot{w}}{(1-v\overline{w}')^n}. \tag{2.13.9}$$

另一方面，采用引理 2.12.5 中的记号，有

$$\Psi(\rho v)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}\frac{(\psi(\rho v,w)-\psi^+(v,w))\dot{w}}{(1-\rho v\overline{w}')^n}$$

$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}\frac{\psi^+(v,w)\dot{w}}{(1-\rho v\overline{w}')^n}.$$

由定理 2.13.1 知，当 $\rho\to 1$ 时，上式右端第一项的极限为零，所以

$$\Psi^+(v)=\lim_{\rho\to 1}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}\frac{(\psi^+(v,w)-\psi^+(v,v))\dot{w}}{(1-\rho v\overline{w}')^n}$$

$$+2\psi^+(v,v).$$

利用 $\Psi^+(v, w)$ 的表达式(2.12.10)及(2.12.19)知

$$\psi^+(v, w)-\psi^+(v, v)$$
$$=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-v\bar{w}')^n\psi(u, w)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-v\bar{w}')^n}+\varphi(v, w)-\varphi(v, v)$$
$$=O(|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}).$$

并且上述估计对一切 $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$ 的 v 与 w 一致地成立，由 Lebesgue 定理，得出

$$\Psi^+(v)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\cdot\int_{w\bar{w}'=1}\frac{(\psi^+(v, w)-\psi^+(v, v))\dot{w}}{(1-v\bar{w}')^n}+2\psi^+(v, v).$$

再以(2.12.10)代入，即得

$$\Psi^+(v)=\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\dot{w}}{(1-v\bar{w}')^n}\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-v\bar{w}')^n\varphi(u, w)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-u\bar{w}')^n}+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\varphi(v, w)\dot{w}}{(1-v\bar{w}')^n}+\varphi(v, v). \qquad (2.13.10)$$

比较(2.13.8)、(2.13.9)与(2.13.10)，便证明了(2.13.5)。

定理 2.13.3 若 $\varphi(u, w)\in\mathscr{L}^*$，则

$$\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{u\bar{u}'=1}H(v, \bar{u})\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(u, w)H(w, \bar{u})\dot{w}$$
$$=-\varphi(v, v)+\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u, w)H(v, \bar{u})H(w, \bar{u})\dot{u}. \qquad (2.13.11)$$

上式右端亦可改写为

$$-\varphi(v, v)+\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}$$

$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}(\varphi(u, w)-\varphi(v, w))H(v, \bar{u})H(w, \bar{u})\dot{u}$$
$$-\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(v, w)H(v, \bar{w})\dot{w}$$
$$-\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(v, w)H(w, \bar{v})\dot{w}$$
$$+\frac{4}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(v, w)\dot{w}. \tag{2.13.12}$$

由引理 2.12.8, (2.13.12) 的第二项的外层积分是一通常积分.

证 先在 $z\bar{z}'<1$ 内构造两个函数

$$\tilde{\Phi}(z)=\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\varphi(u, w)\dot{w}}{(1-w\bar{u}')^n}$$

和

$$\tilde{\Psi}(z)=\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\varphi(u, w)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n(1-w\bar{u}')^n},$$

上二式内层积分均取主值.

与证明定理 2.13.2 中证明 $\Phi(z)=\psi(z)$ 同理, 可知 $\tilde{\Phi}(z)=\tilde{\Psi}(z)$. 所以若用 $\tilde{\Phi}^+(v)$ 与 $\tilde{\Psi}^+(v)$ 分别表示 $\tilde{\Phi}(z)$ 与 $\tilde{\Psi}(z)$ 当 $z=\rho v$ $(0<\rho<1,\ v\bar{v}'=1)$ 趋向 v 时的极限值, 则应有

$$\tilde{\Phi}^+(v)=\tilde{\Psi}^+(v). \tag{2.13.13}$$

显然

$$\tilde{\Phi}(v)$$
$$=\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\varphi(u, w)\dot{w}}{(1-w\bar{u}')^n}$$
$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\varphi(v, w)\dot{w}}{(1-w\bar{v}')^n}. \tag{2.13.14}$$

另一方面, 采用引理 2.12.6 中的符号, 有

$$\tilde{\Psi}(\rho v)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{(\tilde{\psi}(\rho v, w)-\tilde{\psi}^+(v, w))\dot{w}}{(1-\rho v\bar{w}')^n}$$
$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\tilde{\psi}^+(v, w)\dot{w}}{(1-\rho v\bar{w}')^n}.$$

由定理 2.13.1,

$$\widetilde{\Psi}^+(v)=\lim_{\rho\to1}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}\frac{(\psi^+(v,\ w)-\psi^+(v,\ v))\dot{w}}{(1-\rho v\overline{w}')^n}$$

$$+2\widetilde{\psi}(v,\ v).$$

利用 $\widetilde{\psi}^+(v,\ w)$ 的表达式(2.12.11)及(2.12.18)知

$$\widetilde{\psi}^+(v,\ w)-\widetilde{\psi}^+(v,\ v)$$

$$=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\overline{u}'=1}\frac{(1-v\overline{w}')^n(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-v\overline{u}')^n(1-w\overline{u}')^n}$$

$$+2(1-v\overline{w}')^n\varphi(v,\ w)+\varphi(v,\ v)-\varphi(v,\ w)$$

$$=O(|1-v\overline{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}).$$

并且上述估计对一切 $v\overline{v}'=1$, $w\overline{w}'=1$ 上的 v 与 w 一致地成立，由 Lebesgue 定理,得到

$$\widetilde{\Psi}^+(v)=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}\frac{(\widetilde{\psi}^+(v,\ w)-\widetilde{\psi}^+(v,\ v))\dot{w}}{(1-v\overline{w}')^n}$$

$$+2\widetilde{\psi}^+(v,\ v).$$

以(2.12.11)代入,即得

$$\widetilde{\Psi}^+(v)$$

$$=\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\overline{w}'=1}\dot{w}\int_{u\overline{u}'=1}\frac{(\varphi(u,\ w)-\varphi(v,\ w))\dot{u}}{(1-v\overline{u}')^n(1-w\overline{u}')^n}$$

$$+\frac{4}{\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}\varphi(v,\ w)\dot{w}-\varphi(v,\ v)$$

$$-\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}\frac{\varphi(v,\ w)\dot{w}}{(1-v\overline{w}')^n}. \tag{2.13.15}$$

比较(2.13.13)、(2.13.14)、(2.13.15),便证明了(2.13.12)。由引理 2.12.2,即可将(2.13.12)改写为(2.13.11)。

由定理 2.13.2、定理 2.13.3 及引理 2.12.3，可导出含 B–核与 h–核的下列置换公式．即

定理 2.13.4 设 $\varphi(u, w)\in\mathscr{L}$，则

$$\left(\frac{1}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{u\bar{u}'=1}B(v, u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(u, w)B(u, w)\dot{w}$$

$$=\left(\frac{1}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u, w)B(v, u)B(u, w)\dot{u}. \tag{2.13.16}$$

上式右边又可写为

$$\left(\frac{1}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}$$

$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}(\varphi(u, w)-\varphi(v, w))B(v, u)B(u, w)\dot{u}$$

$$-\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(v, w)B(v, w)\dot{w}. \tag{2.13.17}$$

由引理 2.12.9，(2.13.17)的第一项的外层积分是一通常积分。

定理 2.13.5 设 $\varphi(u, w)\in\mathscr{L}$，则

$$\left(\frac{1}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{u\bar{u}'=1}h(v, u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(u, w)h(u, w)\dot{w}$$

$$=-\varphi(v, v)+\left(\frac{1}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}$$

$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u, w)h(v, u)h(u, w)\dot{u}. \tag{2.13.18}$$

上式右边又可写为

$$-\varphi(v, v)+\left(\frac{1}{\omega_{2n-1}}\right)^2\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}$$

$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}(\varphi(u, w)-\varphi(v, w))h(v, u)h(u, w)\dot{u}$$

$$+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{w}'=1}\varphi(v, w)\dot{w}$$

$$-\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(v, w)B(v, w)\dot{w}. \tag{2.13.19}$$

由引理 2.12.9, (2.13.19)第二项的外层积分是一通常积分.

定理 2.13.6 设 $\varphi(u, w)\in\mathscr{L}$, 则

$$\int_{u\bar{u}'=1} B(v, u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(u, w)h(u, w)\dot{w}$$
$$=\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u, w)B(v, u)h(u, w)\dot{u}, \tag{2.13.20}$$

上式右边又可写为

$$\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\int_{u\bar{u}'=1}(\varphi(u, w)-\varphi(v, w))B(v, u)h(u, w)\dot{u}, \tag{2.13.21}$$

$$\int_{u\bar{u}'=1} h(v, u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(u, w)B(u, w)\dot{w}$$
$$=\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u, w)h(v, u)B(u, w)\dot{u}. \tag{2.13.22}$$

上式右边又可写为

$$\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\int_{u\bar{u}'=1}(\varphi(u, w)-\varphi(v, w))h(v, u)B(u, w)\dot{u}. \tag{2.13.23}$$

由引理 2.12.9, (2.13.21)与(2.13.23)的外层积分皆为通常积分.

由公式 (2.13.5)、(2.13.16)、(2.13.18)、(2.13.20) 与 (2.13.22), 立得超球面上奇异积分与弱奇性积分合成的下列结果. 即

系 2.13.1 设 $k_0(u, w)\in\mathscr{L}^*$, 并且

$$k(u, w)=(k_0(u, w)-k_0(u, u))H(u, \bar{w}),$$

则

$$\int_{u\bar{u}'=1} H(v, \bar{u})\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1}k(u, w)\dot{w}$$
$$=\int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\int_{u\bar{u}'=1}H(v, \bar{u})k(u, w)\dot{u}.$$

系 2.13.2　设 $k_1(u, w)$ 与 $k_2(u, w)$ 均属于 $\mathscr{L}$，并且

$$k(u, w) = (k_1(u, w) - k_1(u, u))B(u, w) + (k_2(u, w) - k_2(u, u))h(u, w),$$

则

$$\int_{u\bar{u}'=1} B(v, u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1} k(u, w)\dot{w} = \int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\int_{u\bar{u}'=1} B(v, u)k(u, w)\dot{u},$$

$$\int_{u\bar{u}'=1} h(v, u)\dot{u}\int_{w\bar{w}'=1} k(u, w)\dot{w} = \int_{w\bar{w}'=1}\dot{w}\int_{u\bar{u}'=1} h(v, u)k(u, w)\dot{u}.$$

$\mathscr{L}^*$ 中为 $z\bar{z}'<1$ 内某解析函数的边界值的函数的全体记作 $\mathscr{A}$。由(2.13.5)及(2.12.3)可得

系 2.13.3　若 $f(u)\in\mathscr{A}$, $\varphi(w)\in\mathscr{L}^*$，则

$$H(fH\varphi) = f\varphi + fH\varphi - H(f\varphi),$$

这里 H 由(2.5.1)定义，特别取 $f\equiv1$，即得(2.5.15)，$H^2\varphi=\varphi$。

由(2.13.17)、(2.13.19)、(2.13.21)及(2.13.23)，取 $\varphi(u, w)=\varphi(w)$，即得(2.5.17)、(2.5.19)、(2.5.26)：若 $\varphi(w)\in\mathscr{L}$，则 $B^2\varphi=-B\varphi$, $h^2\varphi=-\varphi-B\varphi+A\varphi$, $Bh\varphi=0$, $hB\varphi=0$。

§ 2.14　正　则　化

定理 2.14.1　设核 $k(v, u)$ 与 $l(v, u)$ 满足

$$|k(v, u)|\leqslant\frac{M}{|1-v\bar{u}'|^{\lambda}},\qquad |l(v, u)|\leqslant\frac{N}{|1-v\bar{u}'|^{\mu}},\tag{2.14.1}$$

其中 M 与 N 为正的常数，$0\leqslant\lambda$, $\mu<n$, $u\bar{u}'=1$, $v\bar{v}'=1$，又设

$$I(v, w) = \int_{u\bar{u}'=1} k(v, u)l(u, w)\dot{u},\tag{2.14.2}$$

则有估计式

$$I(v,\ w)=\begin{cases} C, & \text{当 } \lambda+\mu<n, \\ \dfrac{C}{|1-v\bar{w}'|^{\lambda-\frac{n-\mu}{2}}}, & \text{当 } \lambda+\mu\geqslant n \text{ 且 } \lambda\leqslant\mu, \\ \dfrac{C}{|1-v\bar{w}'|^{\mu-\frac{n-\lambda}{2}}}, & \text{当 } \lambda+\mu\geqslant n \text{ 且 } \lambda\geqslant\mu, \end{cases} \tag{2.14.3}$$

C 为一正的常数.

证 $\lambda+\mu<n$ 时结论显然，以下证明(2.14.3)的第二式(同理可证第三式).

考虑 $v\neq w$ 且 v 与 w 已任意固定，显然只需讨论 $|1-v\bar{w}'|$ 很小的情形.

由(2.14.1)与(2.14.2)知

$$|I(v,\ w)|\leqslant MN\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{\lambda}|1-u\bar{w}'|^{\mu}}$$

$$=MN\left(\int_{\Sigma_\varepsilon(v,u)}+\int_{\sigma_\varepsilon(v,u)}\right)=MN(I_1+I_2).$$

取 $\varepsilon=2\sqrt{2}|1-v\bar{w}'|^{\frac{1}{2}}$，于是

$$I_1\leqslant\frac{C_1}{|1-v\bar{w}'|^{\frac{\lambda}{2}}}\int_{\Sigma_\varepsilon(v,u)}\frac{\dot{u}}{|1-u\bar{w}'|^{\mu}}$$

$$\leqslant\frac{C_2}{|1-v\bar{w}'|^{\frac{\lambda}{2}}}\leqslant\frac{C_2}{|1-v\bar{w}'|^{\lambda-\frac{n-\mu}{2}}}.$$

其中 C_1 与 C_2 为正的常数(以下 C_3 至 C_6 也皆为正的常数).

取 $\delta=\dfrac{1}{16}|1-v\bar{w}'|$，写

$$I_2=\int_{\sigma_\varepsilon(v,u)-\sigma_\delta(v,u)}+\int_{\sigma_\delta(v,u)}=J_1+J_2,$$

因在 $\sigma_\delta(v,\ u)$ 上，$|1-u\bar{w}'|\leqslant\dfrac{3}{2}\varepsilon$，所以

$$J_1 \leqslant \frac{C_3}{|1-v\bar{w}'|^{\lambda}} \int_{\sigma_{3\delta/2}(w,u)} \frac{\dot{u}}{|1-w\bar{u}'|^{\mu}}$$

$$\leqslant \frac{C_4}{|1-v\bar{w}'|^{\lambda-\frac{n-\mu}{2}}}.$$

因在 $\sigma_\delta(v, u)$ 上, $|1-u\bar{u}'|>\frac{1}{3}|1-v\bar{w}'|$ (见(2.12.15)), 所以

$$J_2 < \frac{C_5}{|1-v\bar{w}'|^{\mu}} \int_{\sigma_\delta(v,u)} \frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{\lambda}}$$

$$\leqslant \frac{C_6}{|1-v\bar{w}'|^{\mu-(n-\lambda)}} < \frac{C_6}{|1-v\bar{w}'|^{\lambda-\frac{n-\mu}{2}}}.$$

综合上述, 即得(2.14.3)第二式.

下面是关于正则化的两条主要定理, 它们是对方程(2.12.1)及(2.12.2)进行定性研究的基础.

定理 2.14.2 改写方程(2.12.1)为

$$S\varphi \equiv a\varphi + bH\varphi + K\varphi = f, \tag{2.14.4}$$

其中 $a(v)$, $b(v)=k_0(v, v)$ 和 $f(v)$ 皆属于 $\mathscr{L}^*$,

$$K\varphi = \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) k(v, u) \dot{u},$$

它的核

$$k(v, u) = \frac{2}{\omega_{2n-1}} (k_0(v, u) - k_0(v, v)) H(v, \bar{u}), \quad k_0(v, u) \in \mathscr{L}^*. \tag{2.14.5}$$

如果(2.14.4)中的 a 与 b 在复超球面上恒有 $a^2-b^2 \neq 0$, 则可将(2.14.4)化成 Fredholm 型方程.

证 引进算子 T:

$$T\psi \equiv \frac{1}{a^2 b^2}(a\psi - bH\psi), \quad \psi \in \mathscr{L}^*. \tag{2.14.6}$$

可以证明: T 是(2.14.4)的左正则化算子. 事实上, 用 T 从左边作用到(2.14.4)两端之后, (2.14.4)的右端即为 $Tf=g$, 而其左端

变为

$$TS\varphi=\frac{1}{a^2b^2}(a^2\varphi+abH\varphi+aK\varphi$$

$$-bH(a\varphi)-bH(bH\varphi)-bHK\varphi).$$

应用公式(2.13.5)于 $H(bH\varphi)$，再应用系 2.13.1 于 $HK\varphi$，于是(2.14.4)化成了

$$TS\varphi=\varphi+L\varphi=g, \tag{2.14.7}$$

其中 $L\varphi=\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)l(v,\ u)\dot{u}$，它的核

$$l(v,\ u)=\frac{1}{a^2(v)-b^2(v)}\Big\{a(v)k(v,\ u)$$

$$-\frac{2b(v)(a(u)-a(v))}{\omega_{2n-1}(1-v\bar{u}')^n}$$

$$-\frac{2b(v)}{\omega_{2n-1}(1-v\bar{u}')^n}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{(1-v\bar{u}')^n b(w)\dot{w}}{(1-v\bar{w}')^n(1-w\bar{u}')^n}$$

$$-\frac{2b(v)}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{k(w,\ u)\dot{w}}{(1-v\bar{w}')^n}\Big\}.$$

由引理 2.12.8 知

$$|l(v,\ u)|\leqslant\frac{M}{|1-v\bar{u}'|^{n-\alpha_1}} \tag{2.14.8}$$

其中 M 为正的常数，$0<\alpha_1<1$，即方程(2.14.7)是弱奇性的.

由定理 2.14.1，可知(2.14.7)是 Fredholm 型方程，对此只需指出关键的一点，即方程(2.14.7)的核 $l(v,\ u)$ 从某一个叠核以后的一切叠核都是有界函数(由此可以断言(2.14.7)适合积分方程论的 Fredholm 诸定理，即(2.14.7)是一 Fredholm 型方程，参阅 Михлин[1] § 10)．事实上，由定理 2.14.1 和(2.14.8)，对于 $l(v,u)$ 的 p 次叠核 $l^{(p)}(v,\ u)$ 显然有如下估计：

$$|l^{(p)}(v,\ u)|\leqslant\frac{M_p}{|1-v\bar{u}'|^{n-\alpha_1-\frac{p\alpha_1}{2}}},$$

其中 M_p 为正的常数．于是对于适合

$$p \geqslant \frac{2}{\alpha_1}(n-\alpha_1)$$

的所有 $l^{(p)}(v, u)$ 都是有界函数，定理证毕。

定理 2.14.3 改写(2.12.2)为

$$S\varphi \equiv a\varphi + bB\varphi + ch\varphi + K\varphi = f, \tag{2.14.9}$$

其中 $a(v)$, $b(v)=k_1(v, v)$, $c(v)=k_2(v, v)$ 和 $f(v)$ 皆属于 $\mathscr{L}$,

$K\varphi = \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u)k(v, u)\dot{u}$, 它的核

$$k(v, u) = \frac{1}{\omega_{2n-1}}[(k_1(v, u)-k_1(v, v))B(v, u) + (k_2(v, u)-k_2(v, v))h(v, u)], \tag{2.14.10}$$

$k_1(v, u)$ 与 $k_2(v, u)$ 皆属于 $\mathscr{L}$. 如果(2.14.9)中的 a, b 与 c 在复超球面上恒适合 $(a-b)(a^2+c^2)\neq 0$, 则可将 (2.14.9) 化为 Fredholm 型方程.

证 引进算子 T:

$$T\psi \equiv \alpha\psi + \beta B\psi + \gamma h\psi, \quad \psi \in \mathscr{L}, \tag{2.14.11}$$

其中

$$\alpha = \frac{a}{a^2+c^2}, \quad \beta = -\frac{ab+c^2}{(a-b)(a^2+c^2)}, \quad \gamma = -\frac{c}{a^2+c^2}. \tag{2.14.12}$$

可以证明: T 是(2.14.9)的左正则化算子. 事实上, 用 T 从左边作用到(2.14.9)两端后, 应用公式(2.13.17)、(2.13.19)、(2.13.21)和(2.13.23), 以及推论 2.13.2, 方程(2.14.9)即变为

$$TS\varphi \equiv \varphi + L\varphi = g, \tag{2.14.13}$$

此处 $g = Tf$, $L\varphi = \frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u)l(v, u)\dot{u}$, 它的核

$$l(v, u) = \gamma(v)C(v) + (a(u)-a(v)) \cdot [\beta(v)B(v, u) + \gamma(v)h(v, u)]$$

$$+\int_{w\overline{w}'=1} k(w, u)[\beta(v)B(v, w)+\gamma(v)h(v, w)]\dot{w}$$
$$+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}(b(w)-b(v))$$
$$\cdot[\beta(v)B(v, w)+\gamma(v)h(v, w)]B(w, u)\dot{w}$$
$$+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}(C(w)-C(v))$$
$$\cdot[\beta(v)B(v, w)+\gamma(v)h(v, w)]h(w, u)\dot{w}.$$

由引理 2.12.9 知

$$|l(v, u)|\leqslant\frac{M}{|1-v\overline{u}'|^{n-\alpha_1}},$$

其中 M 为一正数, $0<\alpha_1<1$, 即方程(2.14.13)是弱奇性的, 与定理 2.14.2 的证明同理, (2.14.13) 是 Fredholm 型方程, 定理证毕.

§2.15 某些方程的直接求解

正则化是研究奇异积分方程的重要方法, 但一般说来, 利用正则化定理并不能得到方程的明确解答. 本节在于证明, 当方程(2.12.1)中的 $a(v)$ 与 $k_0(v, u)$ 属于 $\mathscr{A}$ 时, (2.12.1)可以直接求解. $k_0(v, u)\in\mathscr{A}$ 是指 $k_0(v, u)$ 分别作为 v 和 u 的函数皆属于 $\mathscr{A}$, 由于多复变数解析函数的特点, 本节的结论对 $n=1$ 的情形(见 Peters[1])不尽适用.

下面的两条定理, 是方程(2.12.1)直接求解的基础, 它们的证明分别与引理 2.12.1 和定理 2.13.2 相仿, 此处不赘.

定理 2.15.1 设 $f(v, u, w)\in\mathscr{L}^*$, 并且 $f(v, u, w)$ 作为 u 的函数属于 $\mathscr{A}$; 则奇异积分

$$\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\overline{u}'=1}\frac{f(v, u, w)H(v, \overline{u})H(u, \overline{w})\dot{u}}{H(v, \overline{w})}$$
$$=f(v, v, w)-f(v, w, w). \tag{2.15.1}$$

定理 2.15.2 若 $\varphi_1(v, u)$ 与 $\varphi_2(v, u)$ 皆属于 $\mathscr{L}^*$，则

$$\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} \varphi_1(v, u) H(v, \bar{u}) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi_2(u, w) H(u, \bar{w}) \dot{w}$$

$$= \varphi_1(v, v)\varphi_2(v, v) + \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w}$$

$$\cdot \int_{u\bar{u}'=1} \varphi_1(v, u)\varphi_2(u, w) H(v, \bar{u}) H(u, \bar{w}) \dot{u}. \tag{2.15.2}$$

关于方程(2.12.1)的直接求解，主要结果是

定理 2.15.3 在方程(2.12.1)中，若 $a(v)$ 与 $k_0(v, u)$ 皆属于 $\mathscr{A}$，并且 $a^2(v) - b^2(v)$ 在 $v\bar{v}'=1$ 上恒不为零，此处 $b(v) = k_0(v, v)$；则方程(2.12.1)在 $\mathscr{L}^*$ 内有唯一解

$$\varphi = Tf. \tag{2.15.3}$$

算子 T 的定义是：若 $\varphi \in \mathscr{L}^*$，

$$T\psi = \frac{a(v)\psi(v)}{a^2(v) - b^2(v)} - \frac{2}{\omega_{2n-1}(a(v) + b(v))}$$

$$\cdot \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\psi(u) k_0(v, u) H(v, \bar{u}) \dot{u}}{a(u) - b(u)}. \tag{2.15.4}$$

证 先指出一个事实，即若 $f(u) \in \mathscr{A}$，且 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上恒不为零，则 $(f(u))^{-1} \in \mathscr{A}$。这是因为，$f(u) \in \mathscr{A}$ 表明 $f(u)$ 是 $z\bar{z}'<1$ 内的解析函数 $f(z)$ 的连续边界值，并且 $f(u) \in \mathscr{L}^*$。由 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上恒不为零，必存在一正数 $\rho<1$，$f(z)$ 在 $\mathscr{D} = \{z \mid \rho < z\bar{z}' < 1\}$ 内恒不为零，从而 $(f(z))^{-1}$ 在 $\mathscr{D}$ 内解析。于是由多复变数解析函数的连续性定理(例如参阅多复变数的教科书)，$(f(z))^{-1}$ 亦必在整个 $z\bar{z}'<1$ 内解析。因此，$\mathscr{L}^*$ 内的函数 $(f(u))^{-1}$ 是 $z\bar{z}'<1$ 内的解析函数 $(f(z))^{-1}$ 的连续边界值，即 $(f(u))^{-1} \in \mathscr{A}$。

用 T 从左边作用于(2.12.1)的两端，右端即成 Tf，而左端为

$$\frac{a^2(v)\varphi(v)}{a^2(v)-b^2(v)}+\frac{2a(v)}{\omega_{2n-1}(a^2(v)-b^2(v))}$$
$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)k_0(v,u)H(v,\bar{u})\dot{u}-\frac{2}{\omega_{2n-1}(a(v)+b(v))}$$
$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\varphi(u)a(u)k_0(v,u)H(v,\bar{u})\dot{u}}{a(u)-b(u)}$$
$$-\frac{4}{\omega_{2n-1}^2(a(v)+b(v))}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{k_0(v,u)H(v,\bar{u})\dot{u}}{a(u)-b(u)}$$
$$\cdot\int_{w\bar{w}'=1}\varphi(w)k_0(u,w)H(u,\bar{w})\dot{w},$$

由假设知 $\frac{k_0(v,u)k_0(u,w)}{a(u)-b(u)}\in\mathscr{A}$，利用定理2.15.1和定理2.15.2，上式末项即为

$$-\frac{b^2(v)\varphi(v)}{a^2(v)-b^2(v)}-\frac{2b(v)}{\omega_{2n-1}(a^2(v)-b^2(v))}$$
$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)k_0(v,u)H(v,\bar{u})\dot{u}$$
$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}(a(v)+b(v))}$$
$$\cdot\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\varphi(u)b(u)k_0(v,u)H(v,\bar{u})\dot{u}}{a(u)-b(u)}.$$

因而(2.12.1)的左端变成了$\varphi(v)$.

再用(2.12.1)所示的 S 从左边作用于(2.15.3)式两端，利用与上述同样的推理，可知(2.15.3)是方程(2.12.1)在 $\mathscr{L}^*$ 内的唯一解.

系 2.15.1 设 $k_0(v,u)\in\mathscr{A}$，且 $k_0(v,v)\equiv1$，若记

$$S_0\varphi\equiv\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)k_0(v,u)H(v,\bar{u})\dot{u}\quad(\varphi\in\mathscr{L}^*),\tag{2.15.5}$$

则在 $\mathscr{L}^*$ 上有

$$S_0^2=I,\tag{2.15.6}$$

此处 I 为恒同算子：$I\varphi=\varphi$.

证　在(2.12.1)中取 $a(v)\equiv 0$, 则 $S=S_0$, 而且此时(2.15.4)所示的 $T=S_0$, 由定理 2.15.3, $ST=TS=I$, 由此立得(2.15.6)。

(2.15.6)可以看作反演公式 $H^2=I$ 的推广. 因为若取 $k_0(v,u)\equiv 1$, 则 $S_0=H$。

系 2.15.2　若 $b(u)$ 与 $c(u)$ 皆属于 $\mathscr{A}$, 则

(i) 方程

$$a\varphi+bH(c\varphi)=f \tag{2.15.7}$$

在 $\mathscr{L}^*$ 内有唯一解

$$\varphi=\frac{af}{a^2-b^2c^2}-\frac{b}{a+bc}H\left(\frac{cf}{a-bc}\right). \tag{2.15.8}$$

(ii) 在 $\mathscr{L}^*$ 内, 方程

$$a\varphi+bH(c\varphi)+K\varphi=f \tag{2.15.9}$$

等价于一个 Fredholm 型方程, 此处 $K\varphi=\int_{u\bar{u}=1}\varphi(u)k(v,u)\dot{u}$, $k(v,u)\in\mathscr{L}^*$。

证　(i) 即定理(2.15.3)中取 $k_0(v,u)=a(v)b(u)$ 的特殊情形, 以下证明(ii)。

将方程(2.15.9)改写成

$$a\varphi+bH(c\varphi)=f_0, \tag{2.15.10}$$

并把

$$f_0=f-K\varphi\in\mathscr{L}^* \tag{2.15.11}$$

视为已知函数, 于是由(i)知, (2.5.10)在 $\mathscr{L}^*$ 内有唯一解

$$\varphi=T_1f_0. \tag{2.15.12}$$

算子 T_1 的定义是

$$T_1\psi\equiv\frac{a\psi}{a^2-b^2c^2}-\frac{b}{a+bc}H\left(\frac{c\psi}{a-bc}\right),\quad \psi\in\mathscr{L}^*.$$

再以(2.15.11)代入(2.15.12)中, 便得到一个 Fredholm 型方程

$$\varphi+L\varphi=g, \tag{2.15.13}$$

其中 $g=T_1f$, 而

$$L\varphi \equiv \frac{a}{a^2-b^2c^2}K\varphi - \frac{b}{a+bc}H\left(\frac{c}{a-bc}K\varphi\right)$$
$$= \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u)l(v, u)\dot{u},$$

由第一章知，$l(v, u) \in \mathscr{L}^*$.

方程(2.15.13)与(2.15.9)是等价的. 事实上，可引进算子 S_1:

$$S_1\psi \equiv a\psi + bH(c\psi) \quad (\psi \in \mathscr{L}^*),$$

用 S_1 从左边作用于(2.15.13)两端，应用定理2.15.1和定理2.15.2，即得2.15.9.

定理2.15.3表明 $\mathscr{A}$ 是复超球面上的一个重要函数类，为了刻划 $\mathscr{A}$，先证

定理2.15.4　设 $\varphi(u) \in \mathscr{L}^*$，记

$$\Phi(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u)H(z, \bar{u})\dot{u} \quad (z\bar{z}'<1), \qquad (2.15.14)$$

$$\Phi^+(v) = \frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u)H(v, \bar{u})\dot{u} + \frac{1}{2}\varphi(v) \quad (v\bar{v}'=1), \qquad (2.15.15)$$

则当 z 从 $z\bar{z}'<1$ 内沿任一路径趋向 v 时，恒有

$$\lim_{z\to v}\Phi(z) = \Phi^+(v).$$

更具体些，若 $\varphi(u) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$，则对任一小于 α 的正数 δ，存在一仅与 δ 及 $\varphi(u)$ 有关的正数 K，使当超球的内点 z 在球面近旁时，有估计式

$$|\Phi(z) - \Phi^+(v)| \leqslant K|1 - z\bar{v}'|^{\frac{\alpha-\delta}{2}}. \qquad (2.15.16)$$

证　当 $0<\rho<1$ 且 $\rho\to 1$ 时，估计式

$$\frac{d\Phi(\rho w)}{d\rho} = O\left((1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right) \qquad (2.15.17)$$

对 $w\bar{w}'=1$ 上的 w 一致地成立.

事实上，由

$$\frac{d\Phi(\rho w)}{d\rho}=\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\varphi(u)w\bar{u}'\dot{u}}{(1-\rho w\bar{u}')^{n+1}}$$
$$=\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\varphi(u)-\varphi(w))w\bar{u}'\dot{u}}{(1-\rho w\bar{u}')^{n+1}}$$

可知，当 $\rho\to1$ 时，对 w 一致地有

$$\frac{d\Phi(\rho w)}{d\rho}=O\left(\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(\mathrm{Re}(1-w\bar{u}'))^{\frac{\alpha}{2}}\dot{u}}{|1-\rho w\bar{u}'|^{n+1}}\right).$$

在引理 2.12.4 中取 $m=0$，$\gamma=\frac{\alpha}{2}$，利用(2.12.8)即可以从上式得到(2.15.17)。

与定理 2.13.1 证明中同样道理，由第一章，已知 $\lim\limits_{\rho\to1}\Phi(\rho w)=\Phi^+(w)$，可证当 $0<\rho<1$ 且 $\rho\to1$ 时，存在一仅与 $\varphi(u)$ 有关的正数 K_1，使对 $w\bar{w}'=1$ 上的 w 恒有

$$|\Phi(\rho w)-\Phi^+(w)|\leqslant K_1(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

由第一章 § 1.5，知道 $\Phi^+(v)\in\mathrm{Lip}(\alpha-\delta)$。$\delta$ 是小于 α 的任一正数。因而存在一仅与 δ 及 $\varphi(u)$ 有关的正数 K_2，使对 $w\bar{w}'=1$，$v\bar{v}'=1$ 的 w 与 v，恒有

$$|\Phi^+(w)-\Phi^+(v)|\leqslant K_2|1-w\bar{v}'|^{\frac{\alpha-\delta}{2}}$$
$$\leqslant 2^{\frac{\alpha-\delta}{2}}K_2|1-\rho w\bar{v}'|^{\frac{\alpha-\delta}{2}}.$$

因此立得(2.15.16)。其中 $K=K_1+2^{\frac{\alpha-\delta}{2}}K_2$。

定理 2.15.4 表明 Cauchy 型积分(2.15.14)在整个 $z\bar{z}'\leqslant1$ 上连续，即在第一章中讨论(2.15.14)的极限值公式时，对路径所加的限制可以取消。当然如同第一章中所做的那样，(2.15.15)的右边，还可以用别的 Cauchy 主值的形式来表达之。

现在刻划线性空间 $\mathscr{A}$ 如下：

定理 2.15.5　若 $\varphi(u)\in\mathscr{L}^*$，则下述三点等价：(i) $\varphi\in\mathscr{A}$，(ii) $\varphi=H\psi+\psi$，$\psi\in\mathscr{L}^*$，(iii) $H\varphi=\varphi$。

证 由系 2.13.3, (ii)⇒(iii)是显然的.

(iii)⇒(i). 按(2.15.14), 构造 $z\bar{z}'<1$ 的解析函数 $\Phi(z)$, 根据定理 2.15.4 及(iii), $\Phi(z)$的连续边界值为 $\Phi^+(v)=\varphi(v)$, 即 $\varphi\in\mathscr{A}$.

(i)⇒(ii). 利用 Cauchy 公式

$$\varphi(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\varphi(u)H(z,\bar{u})\dot{u}\quad(z\bar{z}'<1),$$

令 $z\to v(v\bar{v}'=1)$, 由定理 2.15.4 知 $\varphi=H\psi+\psi$, 此处 $\psi=\varphi/2\in\mathscr{L}^*$.

第三章　复超球面上的 Hadamard 主值

§3.1 引　言

Hadamard[1] 在解双曲型偏微分方程的 Cauchy 问题时，引进了发散奇异积分的有限部分的概念．例如，在一维的情形，当 $a<u<b$, $n\geqslant 0$ 时，奇异积分

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{(x-u)^{n+1}} \tag{3.1.1}$$

当 $n=0$ 时，可以定义上述积分的 Cauchy 主值为

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_a^{u-\varepsilon}\frac{f(x)dx}{x-u}+\int_{u+\varepsilon}^b\frac{f(x)dx}{x-u}\right\}, \tag{3.1.2}$$

如果上述极限存在的话． 当 $n>0$ 时，积分(3.1.1)是一个发散积分．Hadamard 引入的关于发散积分的有限部分的想法是这样的：对于已给的 $f(x)$，作一函数 $g(x)$，使极限

$$\lim_{t\to u-0}\int_a^t \frac{f(x)-g(x)}{(x-u)^m}dx$$

是存在的． 而这个有限的极限值，就称为这个发散积分的有限部分． Hadamard 他自己讨论的是 $m=n+\frac{1}{2}$，n 为正整数的情形，也就是他研究了

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{(x-u)^{n+\frac{1}{2}}},\ n\text{ 为正整数} \tag{3.1.3}$$

的情形，给出了很多重要的性质，还对高维欧氏空间的发散的奇异

积分作了类似的处理，并将这些工具用来解双曲型偏微分方程的 Cauchy 问题，详细的叙述可参考 Hadamard[1] 及吴新谋[1].

Fox[1] 根据 Hadamard 的想法，把发散积分(3.1.1)的有限部分，看作奇异积分的 Cauchy 主值的一种推广，并且称它为这个发散积分的主值，也称为 Hadamard 主值，也就是发散积分(3.1.1)的 Hadamard 主值定义为

$$P\int_a^b \frac{f(x)dx}{(x-u)^{n+1}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_a^{u-\varepsilon} \frac{f(x)dx}{(x-u)^{n+1}} + \int_{u+\varepsilon}^b \frac{f(x)dx}{(x-u)^{n+1}} - H_n(u, \varepsilon)\right\},$$

这里

当 $n=0$ 时，

$$H_0(u, \varepsilon)=0,$$

当 n 为正整数时，

$$H_n(u, \varepsilon)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(u)}{i!}\left\{\frac{1-(-1)^{n-i}}{(n-i)\varepsilon^{n-i}}\right\}.$$

显然，当 $n=0$ 时，这就是通常的 Cauchy 主值.

当 a 趋于 $-\infty$，b 趋于 ∞ 时，$P\int_{-\infty}^{\infty}$ 看成为一维的 Hilbert 变换的推广.

这种想法立即可以推广到复平面上去，这时 Hadamard 主值成了 Cauchy 型积分的一种推广.

Fox 得到了相应的 Plemelj 公式，还应用它解一些边值问题及奇异积分方程.

在这一章中，我们将 Hadamard 主值的概念推广到多复变数空间. 我们还是从最简单最基本的不可约域超球做起. 首先研究 C^n 中超球面上的高阶奇异积分

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

的 Hadamard 主值，这里 $v\bar{v}'=1$. 并利用这个主值，给出了相应的 Plemelj 公式.

多复变数与单复变数不同，定义 Cauchy 主值的办法是很多的，同样在多复变数中，定义 Hadamard 主值的办法也不是一种，而是多种。

这一章的另一部分是研究 C^n 中超球的 Cauchy 型积分的导数，并得到了相应的 Plemelj 公式. 这时候，Cauchy 型积分的导数的极限值可以用超球面上的 Hadamard 主值来表达. 所以这也可以看作是 Hadamard 主值的一个应用.

如同在第六章中所做的那样，这些结果，都可以推广到强拟凸域上去.

这一章的内容取自史济怀、龚昇[3]，[5].

§3.2 几 条 引 理

引理 3.2.1 设 $c\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，我们有

$$J=\int_{-(\pi-c)}^{-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}+\int_{c}^{\pi-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$=2\mathrm{Im}(B_1-B_2),$$

这里

$$B_1=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}\frac{1}{(1+re^{-ic})^{k-\frac{1}{2}}}$$

$$+\log(1-\sqrt{1+re^{-ic}})-\log(1+\sqrt{1+re^{-ic}}),$$

$$B_2=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}\frac{1}{(1-re^{ic})^{k-\frac{1}{2}}}$$

$$+\log(1-\sqrt{1-re^{ic}})-\log(1+\sqrt{1-re^{ic}}).$$

证 由于

$$J=2\mathrm{Re}\int_c^{\pi-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}},$$

命 $z=re^{i\theta}$, 则

$$\int_c^{\pi-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{i}\int_{re^{ic}}^{-re^{-ic}}\frac{dz}{z(1-z)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

将
$$\frac{1}{z(1-z)^{n+\frac{1}{2}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1-z)^{k+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{z(1-z)^{\frac{1}{2}}}$$

代入上式, 即得所要证者.

引理 3.2.2 设 $d>0$, $\beta>0$, $\gamma=\alpha/\beta$, 如果命

$$A_n=-\frac{2^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\alpha}\,(n-1)}{\pi(2n-1)}\mathrm{Im}\left(\int_0^1\frac{x^{n-2}dx}{(x-i\gamma\sqrt{1-x^2})^{n-\frac{1}{2}}}\right),$$

那末
$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}-\frac{A_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}=1,$$

其中 $\sigma_\varepsilon=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ \alpha^2(1-|u_n|^2)^2+4\beta^2(\mathrm{Im}\,u_n)^2>\varepsilon^2\}$.

证 命 $c=\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2(1-r^2)^2}}{2\beta r}$, 则

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\dot{v}\left\{\int_{-(\pi-c)}^{-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}+\int_c^{\pi-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}\right\}$$
$$+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'>\frac{\varepsilon}{\alpha}}\dot{v}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}=I_1+I_2.$$

由引理 3.2.1,

$$I_1=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\mathrm{Im}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}J_k+J_0-J_0'\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}H_k+H_0-H_0'\right)\right\},$$

这里
$$J_k=\frac{2}{2k-1}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{\dot{v}}{(1+re^{-ic})^{k-\frac{1}{2}}},$$

$$J_0=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\log(1-\sqrt{1+re^{-ic}})\dot{v},$$

$$H_k=\frac{2}{2k-1}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{\dot{v}}{(1-re^{ic})^{k-\frac{1}{2}}},$$

$$H_0=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\log(1-\sqrt{1-re^{ic}})\dot{v},$$

$$J_0'=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\log(1+\sqrt{1+re^{-ic}})\dot{v},$$

$$H_0'=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\log(1+\sqrt{1-re^{ic}})\dot{v}.$$

由于

$$1+re^{-ic}=1+\frac{(4\beta^2r^2-\varepsilon^2+\alpha^2(1-r^2)^2)^{\frac{1}{2}}}{2\beta}$$

$$-i\,\frac{(\varepsilon^2-\alpha^2(1-r^2)^2)^{\frac{1}{2}}}{2\beta},$$

采用球坐标，命

$$1-r^2=s^2,\quad \eta=\frac{\varepsilon}{\alpha},\quad s=\sqrt{\eta}\,t,$$

则

$$J_k=\frac{4\pi^{n-1}}{(2k-1)\Gamma(n-1)}\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}}\frac{s^{2n-3}ds}{\left\{\begin{array}{l}[1+(2\beta)^{-1}(4\beta^2(1-s^2)+\alpha^2s^4-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\\ \quad -i(2\beta)^{-1}(\varepsilon^2-\alpha^2s^4)^{\frac{1}{2}}]^{k-\frac{1}{2}}\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{k-\frac{1}{2}}}{(2k-1)\Gamma(n-1)}\eta^{n-1}\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{\left\{\begin{array}{l}[2\beta+(4\beta^2(1-\eta t^2)+\alpha^2\eta^2(t^4-1))^{\frac{1}{2}}\\ \quad -i(\alpha^2\eta^2(1-t^4))^{\frac{1}{2}}]^{k-\frac{1}{2}}\end{array}\right\}}.$$

被积函数的绝对值不超过$\frac{1}{4\beta^2}$，所以

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_k=0.$$

由于$\operatorname{Im}(\log(1\pm\sqrt{1+re^{-ic}}))=O(1)$，故有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Im}J_0=\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Im}J_0'=0.$$

和J_k一样，H_k可以写成

$$H_k=\frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{k-\frac{1}{2}}}{(2k-1)\Gamma(n-1)}\eta^{n-1}$$

$$\times\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{\left\{\begin{array}{l}[2\beta-(4\beta^2(1-\eta t^2)+\alpha^2\eta^2(t^4-1))^{\frac{1}{2}}\\ \quad -i(\alpha^2\eta^2(1-t^4))^{\frac{1}{2}}]^{k-\frac{1}{2}}\end{array}\right\}}.$$

如果命

$$P=\beta t^2-i\alpha\sqrt{1-t^4},\quad Q=\frac{1}{4\beta}[\alpha^2-(\alpha^2-\beta^2)t^4],$$

那末

$$[2\beta-\sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2)+\alpha^2\eta^2(t^4-1)}-i\alpha\eta\sqrt{1-t^4}]^{k-\frac{1}{2}}$$

$$=[(\beta t^2-i\alpha\sqrt{1-t^4})\eta+\frac{\alpha^2-(\alpha^2-\beta^2)t^4}{4\beta}\eta^2+O(\eta^3)]^{k-\frac{1}{2}}$$

$$=\eta^{k-\frac{1}{2}}[P+Q\eta+O(\eta^2)]^{k-\frac{1}{2}}$$

$$=\eta^{k-\frac{1}{2}}P^{k-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{Q}{P}\eta+O(\eta^2)\right]^{k-\frac{1}{2}}$$

$$=\eta^{k-\frac{1}{2}}P^{k-\frac{1}{2}}\left[1+\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{Q}{P}\eta+O(\eta^2)\right]$$

$$=\eta^{k-\frac{1}{2}}\left[P^{k-\frac{1}{2}}+\left(k-\frac{1}{2}\right)QP^{k-\frac{3}{2}}\eta+O(\eta^2)\right],$$

于是

$$H_k=\frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{k-\frac{1}{2}}}{(2k-1)\Gamma(n-1)}\eta^{n-k-\frac{1}{2}}$$

$$\times\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{P^{k-\frac{1}{2}}+\left(k-\frac{1}{2}\right)QP^{k-\frac{3}{2}}\eta+O(\eta^2)}.$$

当 $k<n-\frac{1}{2}$ 时，有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}H_k=0\quad(k=1,2,\cdots,n-1)$. 此外显然有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Im}(H_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Im}(H_0')=0.$$

最后算 H_n.

$$H_n=\frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{n-\frac{1}{2}}}{(2n-1)\Gamma(n-1)}\frac{1}{\sqrt{\eta}}$$

$$\times\int_0^1 \frac{t^{2n-3}\,dt}{P^{n-\frac{1}{2}}+\left(n-\frac{1}{2}\right)QP^{n-\frac{3}{2}}\eta+O(\eta^2)}.$$

容易看出 A_n 可以改写为

$$A_n=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{a}}{(2n-1)\Gamma(n-1)}$$
$$\times\operatorname{Im}\left(\int_0^1\frac{t^{2n-3}\,dt}{(\beta t^2-ia\sqrt{1-t^4})^{n-\frac{1}{2}}}\right).$$

于是

$$\frac{2}{\omega_{2n-1}}\operatorname{Im}H_n-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}A_n$$
$$=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{a}}{(2n-1)\Gamma(n-1)}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$
$$\times\operatorname{Im}\int_0^1\left[\frac{t^{2n-3}}{P^{n-\frac{1}{2}}+\left(n-\frac{1}{2}\right)QP^{n-\frac{3}{2}}\eta+O(\eta^2)}-\frac{t^{2n-3}}{P^{n-\frac{1}{2}}}\right]dt$$
$$=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{a}}{(2n-1)\Gamma(n-1)}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$
$$\times\left\{\operatorname{Im}\int_0^1\frac{-t^{2n-3}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)P^{n-\frac{3}{2}}Q\eta+O(\eta^2)\right]}{P^{n-\frac{1}{2}}\left[P^{n-\frac{1}{2}}+\left(n-\frac{1}{2}\right)P^{n-\frac{3}{2}}Q\eta+O(\eta^2)\right]}dt\right\}$$
$$=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\varepsilon}}{(2n-1)\Gamma(n-1)\sqrt{a}}$$
$$\times\left\{\operatorname{Im}\int_0^1\frac{-t^{2n-3}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)P^{n-\frac{3}{2}}Q+O(\eta)dt\right.}{P^{n-\frac{1}{2}}\left[P^{n-\frac{1}{2}}+\left(n-\frac{1}{2}\right)P^{n-\frac{3}{2}}Q\eta+O(\eta^2)\right]}\right\}.$$

由此即得　$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\{\dfrac{2}{\omega_{2n-1}}\operatorname{Im}(H_n)-\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}A_n\right\}=0.$

再看 I_2，因为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}=2\pi,$$

因而 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_3=1$. 综合上述，即得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}-\frac{A_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}=1.$$

引理 3.2.3 若 $u_j=x_j+iy_j$, $j=1,2,\cdots,n$, $p_n=(0,\cdots,0,1)$, 则

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{x_n-1}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u}=\frac{1-2n}{4n},$$

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{y_n}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u}=-\frac{2n+1}{4n}i.$$

证 固定 $z(z\bar{z}'<1)$, 设 $z\bar{z}'=\rho^2$, 存在酉方阵 U, 使 $zU=\rho p_n$, 作变换 $u=w\bar{U}'$, 则 $z\bar{u}'=\rho\bar{w}_n$. 命 $\bar{U}'=(a_{ij})$, 则

$$u_n=\sum_{j=1}^{n}a_{jn}w_j,$$

所以

$$x_n=\operatorname{Re}u_n=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(a_{jn}w_j+\bar{a}_{jn}\bar{w}_j),$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(x_n-1)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}\\
&=\frac{1}{2\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{jn}w_j+\bar{a}_{jn}\bar{w}_j)-2}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{w}\\
&=\frac{1}{2\omega_{2n-1}}\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{jn}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{w_j\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}+\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{jn}\right.\\
&\quad\left.\times\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{w}_j\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}-2\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\right\}\\
&=\frac{1}{2\omega_{2n-1}}\left\{a_{nn}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{w_n\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\right.\\
&\quad\left.+\bar{a}_{nn}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{w}_n\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}-2\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\right\}.
\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

令 $u_1=v_1$, $\cdots$, $u_{n-1}=v_{n-1}$, $u_n=re^{i\theta}$, $v=(v_1,\cdots,v_{n-1})$, 而

$$\int_{w\overline{w}'=1}\frac{w_n\dot{w}}{(1-\rho\overline{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}=\int_{0<v\overline{v}'<1}\dot{v}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{re^{-i\theta}d\theta}{(1-\rho re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}.$$

由于

$$\frac{re^{-i\theta}}{(1-\rho re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+q\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(q+1)}\rho^q r^{q+1}e^{i(q-1)\theta},$$

所以 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{re^{-i\theta}d\theta}{(1-\rho re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)2\pi\rho r^2=(2n+1)\pi\rho r^2.$

由此即得 $\displaystyle\frac{1}{2\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}\frac{w_n\dot{w}}{(1-\rho\overline{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{2n+1}{4n}\rho.$

用同样方法易证

$$\int_{w\overline{w}'=1}\frac{\overline{w}_n\dot{w}}{(1-\rho\overline{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}=0,\quad \frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\overline{w}'=1}\frac{\dot{w}}{(1-\rho\overline{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}=1.$$

从 $zU=\rho p_n$ 可以看出，当 $z\to p_n$ 时，$\rho\to1$. 设 U 趋于 $\widetilde{U}$，则 $\widetilde{U}$ 必须满足 $p_n\widetilde{U}=\rho_n$，因此 $a_{nn}\to1$，$a_{kn}\to0(k\neq n)$. 把这些结果代入(3.2.1)，即得

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\overline{u}'=1}\frac{(x_n-1)\dot{u}}{(1-z\overline{u}')^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{1-2n}{4n}.$$

同法可证另一等式.

引理 3.2.4

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\mathrm{Im}(\overline{u}_n)}{(1-\overline{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u}=-\frac{2n+1}{4ni},$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\mathrm{Re}(1-\overline{u}_n)\dot{u}}{(1-\overline{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{2n-1}{4n}.$$

证 由于

$$\left|\frac{\mathrm{Re}(1-\overline{u}_n)}{(1-\overline{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\right|\leqslant\frac{1}{|1-\overline{u}_n|^{n-\frac{1}{2}}},$$

所以

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\mathrm{Re}(1-\overline{u}_n)\dot{u}}{(1-\overline{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}=\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\mathrm{Re}(1-\overline{u}_n)\dot{u}}{(1-z\overline{u}')^{n+\frac{1}{2}}}.$$

由引理 3.2.3，即得要证的后一等式，同样可证前一等式.

引理 3.2.5 等式

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\operatorname{Re}u_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u}=0,\quad \int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\operatorname{Im}u_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u}=0$$

对 $k=1, 2, \cdots, n-1$ 成立.

证 不妨设 $k=1$，命 $\bar{u}_n=re^{i\theta}$，$u_1=v_1$，$\cdots$，$u_{n-1}=v_{n-1}$，则有

$$I=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\operatorname{Re}u_1\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\operatorname{Re}v_1\dot{v}$$

$$\times\left\{\int_{-(\pi-c)}^{-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}+\int_{c}^{\pi-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'>\frac{\varepsilon}{\alpha}}\operatorname{Re}v_1\dot{v}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}=I_1+I_2.$$

如同前面讨论过的那样，

$$I_1=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\operatorname{Im}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}J_k+J_0-J_0'\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}H_k+H_0-H_0'\right)\right\},$$

而

$$J_k=\frac{2}{2k-1}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{\operatorname{Re}v_1\dot{v}}{(1+re^{-ic})^{k-\frac{1}{2}}},$$

$$J_0=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}(\operatorname{Re}v_1)\log(1-\sqrt{1+re^{-ic}})\dot{v},$$

$$J_0'=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}(\operatorname{Re}v_1)\log(1+\sqrt{1+re^{-ic}})\dot{v},$$

$$H_k=\frac{2}{2k-1}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{\operatorname{Re}v_1\dot{v}}{(1-re^{ic})^{k-\frac{1}{2}}},$$

$$H_0=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}(\operatorname{Re}v_1)\log(1-\sqrt{1-re^{ic}})\dot{v},$$

$$H_0'=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}(\operatorname{Re}v_1)\log(1+\sqrt{1-re^{ic}})\dot{v}.$$

用球坐标，$v=(x_1, x_2, \cdots, x_{2n-2})$，则 $\operatorname{Re}v_1=x_1$，$\operatorname{Im}v_1=x_2$，$x_1=s\cos\varphi_1$，$x_2=s\sin\varphi_1\cos\varphi_2$，$\cdots$，$x_{2n-2}=s\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-3}$，

$0\leqslant\varphi_k\leqslant\pi(k=1,2,\cdots,2n-4)$, $0\leqslant\varphi_{2n-3}\leqslant 2\pi$. 于是

$$J_k=\frac{2}{2k-1}\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}}\frac{s^{2n-2}ds}{(1+re^{-i\sigma})^{k-\frac{1}{2}}}\int_0^{\pi}\cos\varphi_1\sin^{2n-4}\varphi_1 d\varphi_1$$

$$\times\int_0^{\pi}\sin^{2n-5}\varphi_2 d\varphi_2\cdots\int_0^{\pi}\sin\varphi_{2n-4}d\varphi_{2n-4}\int_0^{2\pi}d\varphi_{2n-3}.$$

因为 $\int_0^{\pi}\cos\varphi_1\sin^{2n-4}\varphi_1 d\varphi_1=0$, 故

$$J_k=0.$$

同样道理, $$J_0=J_0'=H_k=H_0=H_0'=0,$$

所以 $$I_1=0.$$

同样 $$I_2=0.$$

因而 $$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\mathrm{Re}u_1\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}=0.$$

引理的另一半,可同法证之.

引理 3.2.6

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\mathrm{Re}\,u_k}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u}=0,$$

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\mathrm{Im}\,u_k}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u}=0.$$

$k=1,2,\cdots,n-1$.

证 与证明引理 3.2.3 的方法一样, 这时

$$u_k=\sum_{j=1}^{n}a_{jk}w_j,$$

所以

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\mathrm{Re}\,u_k\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\omega_{2n-1}}a_{nk}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{w_n\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

由于 $\lim\limits_{z\to p_n}a_{nk}=0(k=1,2,\cdots,n-1)$, 即得第一个等式, 另一个等式可同法证之.

§3.3 Hadamard 主值

引理 3.3.1 设 $f(u_1, \cdots, u_n)=f(x_1+iy_1, \cdots, x_n+iy_n)$ 是定义在 $u\bar{u}'\leqslant 1$ 上的实函数，如果 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y_j}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 存在，且在 $u\bar{u}'\leqslant 1$ 上分别满足 α_j 阶和 β_j 阶 Lipschitz 条件，那末

(i) 积分

$$I_{x_k}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}f(0, \cdots, 0, x_k+iy_k, \cdots, x_n+iy_n)\\ \quad -f(0, \cdots, 0, iy_k, \cdots, x_n+iy_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(0, \cdots, 0, 1)\,x_k\end{array}\right\}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u},$$

$$I_{y_k}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}f(0, \cdots, 0, iy_k, x_{k+1}+iy_{k+1}, \cdots, x_n+iy_n)\\ \quad -f(0, \cdots, 0, x_{k+1}+iy_{k+1}, \cdots, x_n+iy_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial y_k}(0, \cdots 0, 1)y_k\end{array}\right\}}{(1-\bar{v}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u},$$

$$I_{x_n}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}f(0, \cdots, 0, x_n)-f(0, \cdots 0, 1)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(0, \cdots 0, 1)(x_n-1)\end{array}\right\}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u},$$

$$I_{y_n}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}f(0, \cdots, 0, x_n+iy_n)-f(0, \cdots 0, x_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial y_n}(0, \cdots 0, 1)y_n\end{array}\right\}}{(1-\bar{v}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u}$$

存在，这里 $k=1, 2, \cdots, n-1$.

(ii) 记

$$I_{x_k}(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}f(0, \cdots, 0, x_k+iy_k, \cdots, x_n+iy_n)\\ \quad -f(0, \cdots, 0, iy_k, \cdots, x_n+iy_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(0, \cdots, 0, 1)x_k\end{array}\right\}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u},$$

$$I_{y_k}(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}f(0,\cdots,0,iy_k,\cdots,x_n+iy_n)\\ \quad -f(0,\cdots,0,x_{k+1}+iy_{k+1},\cdots,x_n+iy_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial y_k}(0,\cdots,0,1)y_k\end{array}\right\}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u},$$

$$I_{x_n}(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}f(0,\cdots,0,x_n)-f(0,\cdots,0,1)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(0,\cdots,0,1)(x_n-1)\end{array}\right\}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u},$$

$$I_{y_n}(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}f(0,\cdots,0,x_n+iy_n)-f(0,\cdots,0,x_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial y_n}(0,\cdots,0,1)y_n\end{array}\right\}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u},$$

这里 z 是 $z\bar{z}'<1$ 中的点. 如果 z 在满足条件

$$\frac{\rho(z,\ p_n)}{d(z,\ L)}\leqslant M \tag{3.3.1}$$

之下趋于 p_n, 则必有

$$\begin{array}{l}\lim\limits_{z\to p_n} I_{x_k}(z)=I_{x_k},\\ \lim\limits_{z\to p_n} I_{y_k}(z)=I_{y_k},\end{array}\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

这里

$$p_n=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1),$$

$$\rho(z,\ p_n)=[(z-p_n)\overline{(z-p_n)'}]^{\frac{1}{2}},$$

$$d(z,\ L)=\min_{u\in L}|1-z\bar{u}'|$$

而 L 表示 $u\bar{u}'=1$, M 是一常数.

如同第一章的 § 1.10 中那样, 条件(3.3.1)是可以去掉的, 而以 K 极限来替代之.

证 根据中值定理及 $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\in \mathrm{Lip}\,\alpha_k$, 有

$$\Big|f(0,\cdots,0,x_k+iy_k,\cdots,x_n+iy_n)$$

$$-f(0,\cdots,0,iy_k,\cdots,x_n+iy_n)-\frac{\partial f}{\partial x_k}(0,\cdots,0,1)x_k\Big|$$

$$=\Big|\frac{\partial f}{\partial x_k}(0,\cdots,0,tx_k+iy_k,\cdots,x_n+iy_n)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x_k}(0,\cdots,0,1)\Big|\,|x_k|$$

$$\leqslant K(t^2x_k^2+y_k^2+\cdots+y_n^2+(x_n-1)^2)^{\frac{\alpha_k}{2}}|x_k|$$

$$\leqslant K(1-x_n^2+(x_n-1)^2)^{\frac{\alpha_k}{2}}(1-x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant K_1(1-x_n)^{\frac{\alpha_k+1}{2}}\leqslant K_1|1-\bar{u}_n|^{\frac{\alpha_k+1}{2}},$$

这里 K, K_1 为常数, $0\leqslant t\leqslant 1$. 另一方面,

$$|1-\bar{u}_n|=|1-p_n\bar{u}'|\leqslant|1-z\bar{u}'|+|(z-p_n)\bar{u}'|,$$

而

$$|(z-p_n)\bar{u}'|\leqslant[(z-p_n)\overline{(z-p_n)'}]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant Md(z,L)\leqslant M|1-z\bar{u}'|,$$

所以
$$|1-\bar{u}_n|\leqslant(M+1)|1-z\bar{u}'|,$$

即
$$|1-z\bar{u}'|\geqslant\frac{1}{M+1}|1-\bar{u}_n|.$$

若记 $I_{x_k}(z)$ 的被积函数为 $g_k(z,u)$, 则有

$$|g_k(z,u)|\leqslant\frac{M_1}{|1-\bar{u}_n|^{n-\frac{\alpha_k}{2}}}.$$

由于 $\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{|1-\bar{u}_n|^{n-\frac{\alpha_k}{2}}}$ 存在, 故由 Lebesgue 定理, $\lim\limits_{z\to p_n}g_k(z,u)$ 是 $u\bar{u}'=1$ 上的可积函数 即 I_{x_k} 存在, 而且

$$\lim_{z\to p_n}\int_{u\bar{u}'=1}g_k(z,u)\dot{u}=\int_{u\bar{u}'=1}\lim_{z\to p_n}g_k(z,u)\dot{u},$$

此即 $\lim\limits_{z\to p_n}I_{x_k}(z)=I_{x_k}$. 同法可证引理的其余部分, 至于去掉条件 (3.3.1), 这只要将 K 极限的条件替代之, 由 §1.10 的推导即得

所要的结果.

定理 3.3.1　f 和 I_{x_k}, I_{y_k} $(k=1,\cdots,n)$ 如引理 3.3.1 所述，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}-\frac{f(p_n)}{\sqrt{\varepsilon}}A_n\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(I_{x_k}+I_{y_k})+\frac{1}{2n}\frac{\partial f(p_n)}{\partial u_n}$$

$$-\frac{\partial f(p_n)}{\partial \bar{u}_n}+f(p_n).$$

证　把 f 写成

$$f(u)=f(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\Big[f(0,\cdots,0,x_k+iy_k,\cdots,x_n+iy_n)$$

$$-f(0,\cdots,0,iy_k,\cdots,x_n+iy_n)-\frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n)x_k\Big]$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\Big[f(0,\cdots,0,iy_k,x_{k+1}+iy_{k+1},\cdots,x_n+iy_n)$$

$$-f(0,\cdots,0,x_{k+1}+iy_{k+1},\cdots,x_n+iy_n)-\frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n)y_k\Big]$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n)x_k$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n)y_k$$

$$+\Big[f(0,\cdots,0,x_n+iy_n)-f(0,\cdots,0,x_n)-\frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n)y_n\Big]$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n)y_n$$

$$+\Big[f(0,\cdots,0,x_n)-f(p_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n)(x_n-1)\Big]$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n)(x_n-1)+f(p_n),\tag{3.3.2}$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}-\frac{f(p_n)}{\sqrt{\varepsilon}}A_n \\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\left\{\begin{array}{l} f(0,\cdots,0,x_k+iy_k,\cdots,x_n+iy_n) \\ \quad -f(0,\cdots,0,iy_k,\cdots,x_n+iy_n) \\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(p_n)x_k \end{array}\right\}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u} \\
&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\left\{\begin{array}{l} f(0,\cdots,0,iy_k,x_{k+1}+iy_{k+1},\cdots,x_n+iy_n) \\ \quad -f(0,\cdots,0,x_{k+1}+iy_{k+1},\cdots,x_n+iy_n) \\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial y_k}(p_n)y_k \end{array}\right\}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u} \\
&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{x_k\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\
&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{y_k\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\
&\quad+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\left\{\begin{array}{l} f(0,\cdots,0,x_n+iy_n)-f(0,\cdots,0,x_n) \\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial y_n}(p_n)y_n \end{array}\right\}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u} \\
&\quad+\frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{y_n\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\
&\quad+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{f(0,\cdots,0,x_n)-f(p_n)-\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p_n)(x_n-1)}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}\dot{u} \\
&\quad+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{(x_n-1)\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\
&\quad+f(p_n)\left\{\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}-\frac{A_n}{\sqrt{\varepsilon}}\right\},
\end{aligned}
$$

由引理 3.2.2, 3.2.4, 3.2.5 及 3.3.1, 即得所要证明的等式.

定理 3.3.2 设 v 是超球面 $u\bar{u}'=1$ 上任一点，f 如引理 3.3.1 所述，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon(v)}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}-\frac{f(v)}{\sqrt{\varepsilon}}A_n\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(J_{x_k}+J_{y_k})+\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_j}(v)v_j$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j}(v)\bar{v}_j+f(v), \tag{3.3.3}$$

这里

$$\sigma_\varepsilon(v)=\{u\,|\,v\bar{u}'=1,\ \alpha^2(1-|v\bar{u}'|^2)^2+4\beta^2(\operatorname{Im}(v\bar{u}'))^2>\varepsilon^2\},$$

J_{x_k}, J_{y_k} 是把 I_{x_k}, I_{y_k} 中的 $f(u)$ 代以 $f(u\bar{U}')$ 所得之积分，而 U 是使得 $vU=p_n$ 成立的酉方阵.

证 作变换 $uU=w$，则 $v\bar{u}'=\bar{w}_n$，于是(3.3.3)的左端为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{f(w\bar{U}')\dot{w}}{(1-\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}-\frac{f(p_n\bar{U}')}{\sqrt{\varepsilon}}A_n\right\}.$$

根据定理 3.3.1，此为

$$\sum_{k=1}^{n}(J_{x_k}+J_{y_k})+\frac{1}{2n}\frac{\partial f(w\bar{U}')}{\partial w_n}(p_n\bar{U}')$$

$$-\frac{\partial f(w\bar{U}')}{\partial \bar{w}_n}(p_n\bar{U}')+f(p_n\bar{U}'). \tag{3.3.4}$$

设 $\bar{U}'=(\alpha_{ij})$，则 $(v_1,\cdots,v_n)=(\alpha_{n1},\cdots,\alpha_{nn})$，所以

$$\frac{\partial f(w\bar{U}')}{\partial w_n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_j}v_j,$$

$$\frac{\partial f(w\bar{U}')}{\partial \bar{w}_n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j}\bar{v}_j,$$

代入(3.3.4)，即为(3.3.3).

称(3.3.3)为奇异积分

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

的 Hadamard 主值，记为

$$P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon(v)}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}-\frac{f(v)}{\sqrt{\varepsilon}}A_n\right\}.$$

§ 3.4 含有 Hadamard 主值的 Plemelj 公式

设 z 是单位球 $z\bar{z}'<1$ 中一点，命

$$F(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}},$$

当 $z\to p_n=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$ 时，可有如下的 Plemelj 公式.

定理 3.4.1 f 如引理 3.3.1 所述，当 z 从 $z\bar{z}'<1$ 的内部趋于 p_n 时，如果保持

$$\frac{\rho(z,\ p_n)}{d(z,\ L)}<M\quad(M\text{ 为一常数}),\qquad(3.4.1)$$

那末

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$=P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

证 由定理 3.3.1 的证明中的(3.3.2)，我们有

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}=\sum_{k=1}^{n}[I_{x_k}(z)+I_{y_k}(z)]$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{x_k\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\int\frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{y_k\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(x_n-1)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{y_n\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$+f(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}},$$

由引理 3.3.1, 3.2.3, 3.2.5, 以及

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}=1,$$

即得

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(I_{x_k}+I_{y_k})+\frac{1}{2n}\frac{\partial f}{\partial u_n}(p_n)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_n}(p_n)+f(p_n),$$

由定理 3.3.1, 即得所要的证明.

由此立即得到

定理 3.4.2　设 $f=f_1+if_2$ 是定义在 $u\bar{u}'\leqslant 1$ 上的复函数, f_1, f_2 分别为 f 的实部与虚部, f_1, f_2 满足引理 3.3.1 中的条件. 设 v 是 $u\bar{u}'=1$ 上任一点, 当 z 从 $z\bar{z}'<1$ 的内部趋于 v 时, 如果保持条件(3.4.1), 则

$$\lim_{z\to v}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$=P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}.$$

这里

$$P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$=P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f_1(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}+iP\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{f_2(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}.$$

定理 3.4.1 及定理 3.4.2 中的条件(3.4.1)是可以去掉而换

成 K-极限，这只要用第一章 §1.10 中的办法即可.

§3.5 复超球面上 Cauchy 型积分的导数

在一个复变数时，若 L 为 C 中一条光滑的封闭曲线，则 f 的 Cauchy 型积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

的导数

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

仍然是一个 Cauchy 型积分.

在多个复变数时，情况就大不相同. Cauchy 型积分的导数不能简单地归化为 Cauchy 型积分. 还是从最简的、最本质的不可约域——超球——开始研究.

若 $z=(z_1, \cdots, z_n)$，$z\bar{z}'<1$，$u=(u_1, \cdots, u_n)$，$f(u)$是定义在 C^n 中超球面 $u\bar{u}'=1$ 上的可积函数. 显然，它的 Cauchy 型积分

$$F(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}$$

的偏导数

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z}=\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}$$

不再是 Cauchy 型积分，这里

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z}=\left(\frac{\partial F(z)}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial F(z)}{\partial z_n}\right),$$

当 z 趋于边界 $u\bar{u}'=1$ 上点 v 时，上式右端是一个高阶奇异积分.

在以下几节中，我们将用 Hadamard 主值来表达它的边界值，可以发现以下的有趣的现象，我们必须把球面上两类不同的点分开来处理，如果记

$$P_j=\{v=(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_n)\,|\,v\bar{v}'=1,\ v_j=0\},$$

$$Q_j=\{v=(v_1,\ \cdots,\ v_j,\ \cdots,\ v_n)\,|\,v\bar{v}'=1,\ v_j\neq 0\},$$

则对 P_j 中的点，用 Cauchy 主值就能表示 $\dfrac{\partial F(z)}{\partial z_j}$ 当 z 趋于 v 时的极限值；而对 Q_j 中的点，则必须用 Hadamard 主值来表示．由于 Hadamard 主值与 Cauchy 主值的一致性，所以可以统一地用 Hadamard主值来表示．在以下的 § 3.6 及 § 3.7 中分别讨论这两种不同的情形．

我们先证明几条引理．

引理 3.5.1　对单位球内任意点 z，均有

$$\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_j\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^m}=0,$$

这里 m 是任意正数，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

证　设 $z\bar{z}'=\rho^2$，取酉方阵 U，使得 $zU=\rho p_n$，这里 $p_n=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$．作变换 $u=w\,\overline{U}'$，命 $\overline{U}'=(\alpha_{ij})$，则

$$u_j=\sum_{l=1}^{n}\alpha_{lj}w_l,$$

于是

$$\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_j\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^m}=\sum_{l=1}^{n}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{\alpha}_{lj}\bar{w}_l}{(1-\rho\bar{w}_n)^m}\dot{w}.\qquad(3.5.1)$$

当 $l<n$ 时，

$$\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{w}_l\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^m}=\int_{v\bar{v}'<1}\bar{v}_l\dot{v}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-\rho re^{i\theta})^m}=2\pi\int_{v\bar{v}'<1}\bar{v}_l\dot{v}.$$

对右端积分作变换 $v_j=e^{i\theta_j}\zeta_j(\theta_j>0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，则

$$\int_{v\bar{v}'<1}\bar{v}_l\dot{v}=e^{-i\theta_l}\int_{\zeta\bar{\zeta}'<1}\bar{\zeta}_l\dot{\zeta},$$

所以 $\displaystyle\int_{v\bar{v}'<1}\bar{v}_l\dot{v}=0$．因而

$$\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{w}_l\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^m}=0\quad(l<n).$$

当 $l=n$ 时，由于

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{re^{i\theta}d\theta}{(1-\rho re^{i\theta})^m}=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m+q)}{\Gamma(q+1)\Gamma(m)}\rho^q r^{q+1}$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(q+1)\theta}\,d\theta=0,$$

所以

$$\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{w}_n\,\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^m}=0.$$

把这些结果代入(3.5.1)，即得所要证明的结论。

引理 3.5.2 设 z 是单位球内任一点，则有

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_j x_k}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{2n}\delta_{kj},$$

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_j y_k}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{2ni}\delta_{kj},$$

这里 $j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ u_k=x_k+iy_k$.

证 命

$$G(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{x_k}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u},$$

根据 Cauchy 积分公式以及引理 3.5.1，有

$$G(z)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{u_k}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}\right\}=\frac{1}{2}z_k.$$

于是

$$\frac{\partial G}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\delta_{kj},$$

这就证明了第一个等式. 同样办法可证第二个等式.

引理 3.5.3 设 $f(u_1,\ \cdots,\ u_n)=f(x_1+iy_1,\ \cdots,\ x_n+iy_n)$ 是定义在 $u\bar{u}'\leqslant 1$ 上的实函数，如果 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j},\ \dfrac{\partial f}{\partial y_j}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 存在，且在 $u\bar{u}'\leqslant 1$ 上分别满足 α_j 阶和 β_j 阶 Lipschitz 条件，那末

(i) 对 $j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$，积分

$$I_{x_k}^{(j)}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}\bar{u}_j[f(0,\cdots,0,\ x_k+iy_k,\ \cdots,\ x_n+iy_n)\\ \quad -f(0,\ \cdots,\ 0,\ iy_k,\ \cdots,\ x_n+iy_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(p_k)x_k]\end{array}\right\}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u},$$

$$I_{y_k}^{(j)}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}\bar{u}_j[f(0,\cdots,0,iy_k,x_{k+1}+iy_{k+1},\cdots,x_n+iy_n)\\ \quad -f(0,\cdots,0,x_{k+1}+iy_{k+1},\cdots,x_n+iy_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial y_k}(p_n)y_k]\end{array}\right\}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u},$$

$$I_{x_n}^{(j)}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}\bar{u}_j[f(0,\cdots,0,x_n)-f(0,\cdots,0,1)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p_n)(x_n-1)]\end{array}\right\}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u},$$

$$I_{y_n}^{(j)}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}\bar{u}_j[f(0,\cdots,0,x_n+iy_n)-f(0,\cdots,0,x_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial y_n}(p_n)y_n]\end{array}\right\}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}$$

存在;

(ii) 记

$$I_{x_k}^{(j)}(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}\bar{u}_j[f(0,\cdots,0,x_k+iy_k,\cdots,x_n+iy_n)\\ \quad -f(0,\cdots,0,iy_k,\cdots,x_n+iy_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(p_n)x_k]\end{array}\right\}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u},$$

$$I_{y_k}^{(j)}(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}\bar{u}_j[f(0,\cdots,0,iy_k,\cdots,x_n+iy_n)\\ \quad -f(0,\cdots,0,x_{k+1}+iy_{k+1},\cdots,x_n+iy_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial y_k}(p_n)y_k]\end{array}\right\}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u},$$

$$I_{x_n}^{(j)}(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}\bar{u}_j[f(0,\cdots,0,x_n)-f(0,\cdots,0,1)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p_n)(x_n-1)]\end{array}\right\}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u},$$

$$I_{y_n}^{(j)}(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\left\{\begin{array}{l}\bar{u}_j[f(0,\cdots,0,x_n+iy_n)-f(0,\cdots,0,x_n)\\ \quad -\dfrac{\partial f}{\partial y_n}(p_n)y_n]\end{array}\right\}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u},$$

这里 z 是单位球内的点. 如果 z 在满足条件(3.3.1)之下趋于 p_n, 则必有

$$\lim_{z\to p_n} I_{x_k}^{(j)}(z)=I_{x_k}^{(j)},\quad \lim_{z\to p_n} I_{y_k}^{(j)}(z)=I_{y_k}^{(j)}$$

$$(j=1,\cdots,n-1;\ k=1,\cdots,n).$$

这条引理的证明与引理 3.3.1 的证明相仿. 同样, 条件(3.3.1)是可以去掉而代之以 K-极限.

引理 3.5.4 对 $j=1,2,\cdots,n-1$, 有

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_j\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}=0,$$

这里

$$\sigma_\varepsilon=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ \alpha^2(1-|u_n|^2)^2+4\beta^2(\operatorname{Im}u_n)^2>\varepsilon^2,\ \alpha>0,\ \beta>0\}.$$

证 命 $u_n=re^{i\theta}$, $u_1=v_1,\cdots,u_{n-1}=v_{n-1}$, 则

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_j\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\bar{v}_j\dot{v}\left\{\int_{-(\pi-c)}^{-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}}+\int_c^{\pi-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}}\right\}+\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\bar{v}_j\dot{v}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}}=I_1+I_2,$$

这里
$$c=\sin^{-1}\frac{\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2(1-r^2)^2}}{2\beta r}.$$

把 I_1 的内层积分记为 $\varphi(r)$, 作变换 $v_j=e^{i\tau}\zeta_j$, 由于 $r^2=1-v\bar{v}'$, 便有

$$I_1=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\bar{v}_j\varphi(r)\dot{v}=\int_{\zeta\bar{\zeta}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}e^{-i\tau}\bar{\zeta}_j\varphi(r)\dot{\zeta}=e^{-i\tau}I_1,$$

所以 $I_1=0$. 同样道理 $I_2=0$.

引理 3.5.5 对于 $j=1,\cdots,n-1$, $k=1,\cdots,n$, 有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_jx_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{2n}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\right]\delta_{jk},$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_jy_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{2ni}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\right]\delta_{jk}.$$

证 显然

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_j x_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}$$

$$=\frac{1}{2\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_j u_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}+\frac{1}{2\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{v}_j\bar{u}_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}. \tag{3.5.2}$$

和引理 3.5.4 的证法一样，易知

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{v}_j\bar{u}_k\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}=0\quad(j=1,\cdots,n-1,\ k=1,\cdots,n), \tag{3.5.3}$$

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_j u_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=0\quad(j\neq k). \tag{3.5.4}$$

当 $j=k<n$ 时，不妨先取 $j=1$，

$$\frac{1}{2\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{|u_1|^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}$$

$$=\frac{1}{2\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}|v_1|^2\dot{v}\left\{\int_{-(\pi-c)}^{-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}}\right.$$

$$\left.+\int_{c}^{\pi-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}}\right\}+\frac{1}{2\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'>\frac{\varepsilon}{\alpha}}|v_1|^2\dot{v}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}}$$

$$=I_1+I_2, \tag{3.5.5}$$

易证（参阅第六章）

$$I_1=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\operatorname{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n}J_k-\sum_{k=1}^{n}H_k+J_0-H_0\right\}$$

$$+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}|v_1|^2(\pi-2c)\dot{v},$$

其中

$$J_0=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}|v_1|^2\log\frac{1}{1+re^{-ic}}\dot{v},$$

$$J_k=\frac{1}{k}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{|v_1|^2\dot{v}}{(1+re^{-ic})^k},$$

$$H_0=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}|v_1|^2\log\frac{1}{1-re^{ic}}\dot{v},$$

$$H_k=\frac{1}{k}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{|v_1|^2\dot{v}}{(1-re^{i\varphi})^k}.$$

设 $v=(t_1, t_2, \cdots, t_{2n-2})$，用球坐标

$$t_1=s\cos\varphi_1,\ t_2=s\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\ \cdots,$$

$$t_{2n-2}=s\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-3}.$$

则

$$|v_1|^2=t_1^2+t_2^2=s^2(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_2).$$

于是

$$\begin{aligned}J_k=&\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_2)\\&\times\sin^{2n-4}\varphi_1\sin^{2n-5}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-4}\,d\varphi_1\cdots d\varphi_{2n-3}\\&\times\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}}\left\{1+\frac{\sqrt{4\beta^2(1-s^2)+\alpha^2s^4-\varepsilon^2}}{2\beta}\right.\\&\left.-i\,\frac{\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2s^4}}{2\beta}\right\}^{-k}s^{2n-1}ds\end{aligned}$$

对内层积分作变换

$$\eta=\frac{\varepsilon}{\alpha},\quad s=\sqrt{\eta}\,t,$$

内层积分变为

$$\begin{aligned}&(2\beta)^k\eta^n\int_0^1 t^{2n-1}[2\beta+\sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2)+\alpha^2\eta^2(t^4-1)}\\&-i\sqrt{\alpha^2\eta^2(1-t^4)}]^{-k}dt.\end{aligned}$$

因为被积函数有界，上式当 $\eta\to 0$ 时趋于 0，因而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_k=0\quad(k=1, 2, \cdots, n).$$

用同样方法可以证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_0=0.$$

和 J_k 一样，H_k 可以写为

$$\begin{aligned}H_k=&\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_2)\\&\times\sin^{2n-4}\varphi_1\sin^{2n-5}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-4}\,d\varphi_1\cdots d\varphi_{2n-3}\end{aligned}$$

$$\times (2\beta)^k \eta^n \int_0^1 t^{2n-1}\left[2\beta - \sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2)+\alpha^2\eta^2(t^4-1)}\right.$$
$$\left. - i\sqrt{\alpha^2\eta^2(1-t^4)}\right]^{-k} dt.$$

记内层积分为 M_k, 则

$$M_k = (2\beta)^k \eta^n \int_0^1 t^{2n-1} \eta^{-k} \left[(\beta t^2 - i\alpha\sqrt{1-t^4}) + O(\eta)\right]^{-k} dt.$$

显然, 当 $k<n$ 时,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_k = 0,$$

因而

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H_k = 0.$$

当 $k=n$ 时,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_n = (2\beta)^n \int_0^1 \frac{t^{2n-1}\,dt}{(\beta t^2 - i\alpha\sqrt{1-t^4})^n}$$
$$= 2^{n-1}\int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{(x - i\gamma\sqrt{1-x^2})^n}.$$

在第六章中将要证明

$$\operatorname{Im}\left(\int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{(x-i\gamma\sqrt{1-x^2})^n}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^n.$$

于是得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Im}(H_n) = 2^{n-2}\pi\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^n.$$

直接计算可得

$$\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_2)$$
$$\times \sin^{2n-4}\varphi_1 \sin^{2n-5}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-4}\,d\varphi_1\cdots d\varphi_{2n-3} = \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)},$$

因而

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Im}(H_n) = \frac{\pi^n}{2n\Gamma(n)}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n.$$

另外容易证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Im}(H_0) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to\varepsilon}\int_{v\bar v' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} |v_1|^2(\pi - 2c)\dot v = 0.$$

把这些结果代入 I_1 的表达式, 得

$$\lim_{\varepsilon\to0} I_1 = \lim_{\varepsilon\to0} \frac{-1}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im}(H_n) = -\frac{1}{4n}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n,$$

而
$$\lim_{\varepsilon\to0} I_2 = \frac{\pi}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}'<1} |v_1|^2 \dot{v} = \frac{1}{2n}.$$

把这些结果代入(3.5.5)，即得

$$\lim_{\varepsilon\to0} \frac{1}{2\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{|u_1|^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = \frac{1}{2n}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\right]. \tag{3.5.6}$$

显然，把 u_1 换成 $u_j(j=2, \cdots, n-1)$，上式也成立．把(3.5.3)，(3.5.4)，(3.5.6)代入(3.5.2)，即得第一个等式．另一个等式可同法证之．

§3.6 部分特殊点处的极限值

利用上节这些引理，便可证明

定理 3.6.1 若 f 满足引理 3.5.3 的条件，$F(z)$ 为 f 的 Cauchy 型积分

$$F(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}.$$

当 z 从超球内部趋于 p_n 时，如果满足(3.3.1)，那末对

$$j=1, 2, \cdots, n-1,$$

有

$$\lim_{z\to p_n} \frac{\partial F}{\partial z_j}(z) = \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(r)} \frac{\bar{u}_j f(u)\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n \frac{\partial f}{\partial u_j}(p_n),$$

这里 $\int_{u\bar{u}'=1(r)}$ 表示 Cauchy 主值，定义为 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{\sigma_\varepsilon}$.

证 显然

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_j f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}. \tag{3.6.1}$$

由(3.3.2), 即得

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_j f(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[I_{x_k}^{(j)}(z)+I_{y_k}^{(j)}(z)]$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_j x_k\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_j y_k\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_j y_n\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_j(x_n-1)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$

$$+f(p_n)\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_j}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}.$$

根据引理 3.5.1, 3.5.2 及 3.5.3, 我们有

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_j f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(I_{x_k}^{(j)}+I_{y_k}^{(j)})+\frac{1}{2n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_n)+\frac{1}{2ni}\frac{\partial f}{\partial y_j}(p_n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(I_{x_k}^{(j)}+I_{y_k}^{(j)})+\frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial u_j}(p_n). \tag{3.6.2}$$

另一方面, 根据引理 3.5.3, 3.5.4 及 3.5.5, 又有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_j f(u)\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(I_{x_k}^{(j)}+I_{y_k}^{(j)})+\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_n)\frac{1}{2n}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\right]$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y_j}(p_n)\frac{1}{2ni}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(I_{x_k}^{(j)}+I_{y_k}^{(j)})$$

$$+\frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\right]\frac{\partial f}{\partial u_j}(p_n),$$

或者

$$\sum_{k=1}^{n}(I_{x_k}^{(j)}+I_{y_k}^{(j)}) = \frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1(r)}\frac{\bar{u}_j f(u)\dot{u}}{(1-u_n)^{n+1}}$$
$$-\frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\right]\frac{\partial f}{\partial u_j}(p_n).$$

代入 (3.6.2), 即得所要证的结果.

定理 3.6.2 设 $f=f_1+if_2$ 是定义在 $u\bar{u}'\leqslant 1$ 上的复函数, f_1, f_2 分别满足引理 3.5.3 的条件, 设 $F(z)$ 为 $f(u)$的 Cauchy 型积分, 记

$$P_k=\{v=(v_1, \cdots, v_k, \cdots, v_n)\,|\,v\bar{v}'=1,\ v_k=0\}.$$

如果 z 在条件(3.3.1)之下从单位球内趋于 P_k 中的点 v, 那末对 $k=1, 2, \cdots, n$ 均有

$$\lim_{z\to v}\frac{\partial F}{\partial z_k}(z)=\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\frac{\partial f}{\partial u_k}(v),$$

这里右端第一个积分定义为

$$\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{n}{\omega_{2n-1}}\left\{\int_{\sigma_\varepsilon(v)}\frac{\bar{u}_k f_1(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}\right.$$
$$\left.+i\int_{\sigma_\varepsilon(v)}\frac{\bar{u}_k f_2(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}\right\},$$

而

$$\sigma_\varepsilon(v)=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ \alpha^2(1-|v\bar{u}'|^2)^2+4\beta^2(\operatorname{Im}v\bar{u}')^2>\varepsilon^2\}.$$

证 取酉方阵 U, 使 $vU=p_n$, 记 $\overline{U}'=(\alpha_{ij})$, 从 $v=p_n\overline{U}'$ 得

$$(v_1, \cdots, v_n)=(\alpha_{n1}, \cdots, \alpha_{nn}),$$

因而 $\alpha_{nk}=0$. 命 $uU=w$, 则

$$u_k=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{jk}w_j.$$

记 $zU=\zeta$, 则当 $z\to v$ 时, $\zeta\to p_n$. 于是

$$\lim_{z\to v}\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f_1(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\bar{a}_{jk}\left\{\lim_{\zeta\to p_n}\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{w}_j f_1(w\bar{U}')}{(1-\zeta\bar{w}')^{n+1}}\dot{w}\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\bar{a}_{jk}\left\{\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1(r)}\frac{\bar{w}_j f_1(w\bar{U}')}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}}\dot{w}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\frac{\partial f_1(w\bar{U}')}{\partial w_j}(p_n)\right\}$$

$$=\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f_1(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\bar{a}_{jk}a_{jl}\frac{\partial f_1}{\partial u_l}(v)$$

$$=\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f_1(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\frac{\partial f_1}{\partial u_k}(v).$$

对 f 的虚部 f_2 可得同样的结果.

在上述定理中,若取 $\alpha=\beta$, 则得更简单的公式:

$$\lim_{z\to v}\frac{\partial F}{\partial z_k}(z)=\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u_k}(v),$$

这里 $v\in P_k$.

如前面 § 1.10 所讨论的那样, 定理 3.6.1 及定理 3.6.2 中的条件(3.3.1)是可以去掉的, 而替代以 K 极限.

§ 3.7　用 Hadamard 主值表示边界值

本节讨论 Cauchy 型积分的导数在球面上一般点处的极限值.

引理 3.7.1

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n x_k x_l}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{2n}\delta_{nk}\delta_{nl},$$

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n x_k y_l}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{2ni}\delta_{nk}\delta_{nl},$$

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n y_k y_l}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}=-\frac{1}{2n}\delta_{nk}\delta_{nl}.$$

证 命 $G(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{x_k x_l}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}.$

因为 $x_k=\frac{1}{2}(u_k+\bar{u}_k),\quad x_l=\frac{1}{2}(u_l+\bar{u}_l),$

所以

$$G(z)=\frac{1}{4\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{u_k u_l+\bar{u}_k u_l+u_k\bar{u}_l+\bar{u}_k\bar{u}_l}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}.\quad(3.7.1)$$

根据 Cauchy 积分公式,

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{u_k u_l}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}=z_k z_l,$$

此外,利用证明引理 3.5.1 的方法,可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k u_l}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}\\&=\frac{1}{4\omega_{2n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{il}\bar{a}_{jk}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{w_i\bar{w}_j}{(1-\rho\bar{w}_n)^n}\dot{w}\\&=\frac{1}{4\omega_{2n-1}}\sum_{j=1}^{n}a_{jl}\bar{a}_{jk}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{|w_j|^2}{(1-\rho\bar{w}_n)^n}\dot{w}.\end{aligned}$$

不难算出

$$\int_{w\bar{w}'=1}\frac{|w_j|^2\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^n}=\frac{2\pi^n}{\Gamma(n+1)}\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

于是 $$\frac{1}{4\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k u_l}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}=\frac{1}{4n}\delta_{kl}.$$

易知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k\bar{u}_l}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}\\&=\frac{1}{4\omega_{2n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{il}\bar{a}_{jk}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{w}_i\bar{w}_j}{(1-\rho\bar{w}_n)^n}\dot{w}=0.\end{aligned}$$

把这些结果代入(3.7.1),得

$$G(z)=\frac{1}{4}z_k z_l+\frac{1}{2n}\delta_{kl}.$$

由此得

$$\lim_{z \to p_n} \frac{\partial G}{\partial z_n}(z) = \frac{1}{2} \delta_{nk} \delta_{nl}.$$

这就是要证的第一个等式．同法可证其余两个等式．

引理 3.7.2

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \frac{(n-1)\beta}{n(\alpha + \beta)},$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n y_n}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}$$

$$= \frac{1}{i} \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \frac{\beta + n\alpha}{n(\alpha + \beta)} \right\},$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n x_k}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = 0$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n-1),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n y_k}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = 0$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

证　先证第二个等式．由于

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n y_n}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}$$

$$= \frac{1}{2i\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n u_n - \bar{u}_n^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}$$

$$= \frac{1}{2i\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \dot{v} \left\{ 2\mathrm{Re} \int_\delta^{\pi-\delta} \frac{r^2 - r^2 e^{2i\theta}}{(1 - re^{i\theta})^{n+1}} d\theta \right\}$$

$$+ \frac{1}{2i\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' > \frac{\varepsilon}{\alpha}} \dot{v} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 (1 - e^{2i\theta})}{(1 - re^{i\theta})^{n+1}} d\theta$$

$$= I_1 + I_2.$$

以及

$$\int_{\varphi}^{\pi-\varphi}\frac{r^2-r^2e^{2i\theta}}{(1-re^{i\theta})^{n+1}}\,d\theta=\frac{1}{i}\int_{re^{i\varphi}}^{-re^{-i\varphi}}\frac{r^2-z^2}{z(1-z)^{n+1}}\,dz$$

$$=\frac{1}{i}\left\{r^2\int_{re^{i\varphi}}^{-re^{-i\varphi}}\frac{dz}{z(1-z)^{n+1}}-\int_{re^{i\varphi}}^{-re^{-i\varphi}}\frac{z}{(1-z)^{n+1}}\,dz\right\}$$

$$=\frac{1}{i}\left\{\left[\frac{r^2-1}{n}\frac{1}{(1+re^{-i\varphi})^n}+\frac{r^2+1}{n-1}\frac{1}{(1+re^{-i\varphi})^{n-1}}\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{r^2}{k}\frac{1}{(1+re^{-i\varphi})^k}+r^2\log(-re^{-i\varphi})-r^2\log(1+re^{-i\varphi})\right]$$

$$-\left[\frac{r^2-1}{n(1-re^{i\varphi})^n}+\frac{r^2+1}{(n-1)(1-re^{i\varphi})^{n-1}}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{r^2}{k(1-re^{i\varphi})^k}\right.$$

$$\left.\left.+r^2\log re^{i\varphi}-r^2\log(1-re^{i\varphi})\right]\right\}=\frac{1}{i}[B_1-B_2].$$

于是

$$I_1=\frac{1}{2i\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}2\mathrm{Re}\left(\int_{\varphi}^{\pi-\varphi}\frac{r^2(1-e^{2i\theta})}{(1-re^{i\theta})^{n-1}}\,d\theta\right)\dot{v}$$

$$=\frac{1}{i\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\mathrm{Im}(B_1-B_2)\dot{v}$$

$$=\frac{1}{i\omega_{2n-1}}\,\mathrm{Im}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}J_k+J_0-J_0'\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}H_k+H_0-H_0'\right)\right\},$$

其中

$$J_n=\frac{1}{n}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{r^2-1}{(1+re^{-i\varphi})^n}\,\dot{v},$$

$$J_{n-1}=\frac{1}{n-1}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{r^2+1}{(1+re^{-i\varphi})^{n-1}}\,\dot{v},$$

$$J_k=\frac{1}{k}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{r^2\dot{v}}{(1+re^{-i\varphi})^k}$$

$$(k=1,\ \cdots,\ n-2),$$

$$J_0=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}r^2\log(-re^{-i\varphi})\dot{v},$$

$$J_0'=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}r^2\log(1+re^{-i\varphi})\dot{v},$$

$$H_n=\frac{1}{n}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{r^2-1}{(1-re^{i\varphi})^n}\,\dot{v},$$

$$H_{n-1}=\frac{1}{n-1}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{r^2+1}{(1-re^{i\varphi})^n}\dot{v},$$

$$H_k=\frac{1}{k}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{r^2\dot{v}}{(1-re^{i\varphi})^k}$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2),$$

$$H_0=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}r^2\log(re^{i\varphi})\dot{v},$$

$$H_0'=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}r^2\log(1-re^{i\varphi})\dot{v}.$$

用引理 3.5.5 中处理 J_k 的方法，容易证明

$$\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Im}(J_0)=\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Im}(J_0')=0,\quad \lim_{\varepsilon\to0}J_k=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

此外
$$\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Im}(H_0)=\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Im}(H_0')=0,$$

而

$$H_{n-1}=\frac{1}{n-1}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{1+r^2}{(1-re^{i\varphi})^{n-1}}\dot{v}$$
$$=\frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)\Gamma(n-1)}(2\beta)^{n-1}\int_0^1\frac{(2-\eta t^2)\eta^{n-1}t^{2n-3}\,dt}{\eta^{n-1}[\beta t^2-i\alpha\sqrt{1-t^4}+O(\eta)]^{n-1}},$$

所以

$$\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Im}(H_{n-1})=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}2^{n-1}\operatorname{Im}\left(\int_0^1\frac{x^{n-2}\,dx}{(x-ir\sqrt{1-x^2})^{n-1}}\right)$$
$$=\frac{\pi^n}{\Gamma(n)}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}.$$

用完全相同的方法可以证明

$$\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Im}(H_n)=-\frac{\pi^n}{n\Gamma(n-1)}\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}H_k=0\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2).$$

于是

$$\lim_{\varepsilon\to0}I_1=\frac{1}{i\omega_{2n-1}}\lim_{\varepsilon\to0}(-H_n-H_{n-1})$$
$$=-\frac{1}{2i}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\frac{\beta+n\alpha}{n(\alpha+\beta)}.$$

再看 I_2. 由于

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2(1-e^{2i\theta})}{(1-re^{i\theta})^{n+1}}d\theta$$

$$=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(q+1)}r^{q+2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iq\theta}(1-e^{2i\theta})d\theta=2\pi r^2,$$

所以

$$\lim_{\varepsilon\to0}I_2=\frac{1}{2i}\frac{2\pi}{\omega_{2n-1}}\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^1(1-s^2)s^{2n-3}ds=\frac{1}{2ni}.$$

综合这些结果, 即得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n y_n}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}$$

$$=\frac{1}{i}\left[\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\frac{\beta+n\alpha}{n(\alpha+\beta)}\right].$$

注意到

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{i}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n y_n}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}$$

$$-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n}}$$

以及 $$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n}{(1-\bar{u}_n)^{n}}\dot{u}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1},$$

即得第一个等式. 用证明引理 3.5.4 的方法即可证明另外两个等式成立.

引理 3.7.3 对 $i, j=1, 2, \cdots, n$, $i+j<2n$, 有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n x_i x_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=-\frac{1}{4n}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\delta_{ij},$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n y_i y_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=-\frac{1}{4n}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n\delta_{ij}.$$

证 由于

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n x_i x_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}$$

$$=\frac{1}{4\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(u_iu_j+\bar{u}_iu_j+u_i\bar{u}_j+\bar{u}_i\bar{u}_j)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u},\quad(3.7.2)$$

当 $i\neq j$ 时，利用证明引理 3.5.4 的方法，易知上述积分为 0. 今设 $i=j<n$，不妨设 $i=j=1$. 用证明引理 3.5.4 的方法可得

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{v}_n u_1^2 \dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}=0,\qquad \int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{v}_n \bar{u}_1^2 \dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n-1}}=0,\quad (3.7.3)$$

而

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{v}_n|u_1|^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}&=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}|v_1|^2\dot{v}\left\{2\mathrm{Re}\int_c^{\pi-c}\frac{re^{i\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}}\right\}\\&\quad+\int_{v\bar{v}'>\frac{\varepsilon}{\alpha}}|v_1|^2\dot{v}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{re^{i\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}}\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

显然 $I_2=0$. I_1 的内层积分

$$2\mathrm{Re}\int_c^{\pi-c}\frac{re^{i\theta}d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}}=\frac{2}{n}\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{(1+re^{-ic})^n}-\frac{1}{(1-re^{ic})^n}\right\},$$

因而 $I_1=\mathrm{Im}(J_n-H_n)$，这里

$$J_n=\frac{2}{n}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{|v_1|^2\dot{v}}{(1+re^{-ic})^n},\quad H_n=\frac{2}{n}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{|v_1|^2\dot{v}}{(1-re^{ic})^n}.$$

在引理 3.5.5 中已经证明

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_n=0,\ \lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{Im}(H_n)=\frac{\pi^n}{n\Gamma(n)}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n,$$

即
$$\lim_{\varepsilon\to0}I_1=-\frac{\pi^n}{n\Gamma(n)}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n,$$

所以
$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n|u_1|^2\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}=-\frac{\pi^n}{n\Gamma(n)}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n.\quad (3.7.4)$$

把(3.7.3)，(3.7.4)代入(3.7.2)得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n x_1^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=-\frac{1}{4n}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^n.$$

把 x_1 换成 $x_j(j=2,\cdots,n-1)$，上式也成立. 这就证明了第一个等式. 用完全相同的方法可以证明第二个等式.

引理 3.7.4

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=-\frac{1}{2n},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n y_n^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=-\frac{1}{2n}.$$

证 先证第一个等式. 因为

$$\left|\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\right|\leqslant\frac{1}{|1-\bar{u}_n|^{n-1}},$$

故积分 $\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}$ 存在, 因而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}. \tag{3.7.5}$$

另一方面,假定 z 在满足条件(3.3.1)下趋于 p_n(这个条件可以代之以 K 极限,如前所述),那末

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}. \tag{3.7.6}$$

比较(3.7.5), (3.7.6)得

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}. \tag{3.7.7}$$

记
$$G(z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{(x_n-1)^2}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u},$$

则

$$\begin{aligned}G(z)&=\frac{1}{4\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{u_n^2+\bar{u}_n^2+4-4u_n-4\bar{u}_n+2u_n\bar{u}_n}{(1-z\bar{u}')^n}\dot{u}\\&=\frac{1}{4}\left(z_n^2+4-4z_n+\frac{2}{n}\right),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_n}=\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{2}z_n-1,$$

所以
$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}=-\frac{1}{2n}.$$

代入(3.7.7)即得第一个等式. 用完全相同的方法可以证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n|1-\bar{u}_n|^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=-\frac{1}{n}.$$

注意到

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n y_n^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n|1-\bar{u}_n|^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}-\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u},$$

即得第二个等式的证明.

引理 3.7.5 对 $k,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ k+j<2n$, 均有

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n x_k y_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=0;$$

对 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$, 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)y_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=0.$$

证　由于

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n x_k x_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{4i}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(u_k u_j+\bar{u}_k u_j-u_k\bar{u}_j-\bar{u}_k\bar{u}_j)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u},$$

如果 $k\neq j$, 则易知上述积分为零. 今设 $k=j<n$, 则

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n x_k y_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{4i}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(u_k^2-\bar{u}_k^2)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}.$$

利用证明引理 3.5.4 的方法, 容易证明这一积分也为零. 这就证明了第一个等式.

当 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 时, 第二个等式成立是显然的. 当 $j=n$ 时, 由于

$$\left|\frac{\bar{u}_n(x_n-1)y_n}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\right|\leqslant\frac{1}{|1-\bar{u}_n|^{n-\frac{1}{2}}},$$

用证明引理 3.7.4 时同样的推理, 即知

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)y_n}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)y_n}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}.$$

根据引理 3.5.2 和引理 3.7.1 即得

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)y_n}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}=\frac{1}{2ni}-\frac{1}{2ni}=0.$$

故第二个等式也成立.

有了这些引理, 便可证明下面的

定理 3.7.1　设 f 是定义在 $u\bar{u}'\leqslant 1$ 上的实函数, 有三阶连续偏导数, 那末

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n[f(u)-f(p_n)]}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}$$

存在, 且等于

$$c_n\frac{\partial f(p_n)}{\partial u_n}+\left(\frac{1}{n}-2c_nd_n+c_n\right)\frac{\partial f(p_n)}{\partial \bar{u}_n}$$
$$-\frac{c_{n+1}}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_j\partial \bar{u}_j}-\frac{1}{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_n\partial \bar{u}_n}+I,$$

这里　　$$c_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1},\quad d_n=\frac{\beta+n\alpha}{n(\alpha+\beta)},$$

I 是一个确定的数.

证　由 Taylor 公式, 有

$$\begin{aligned}f(u_1,\cdots,u_n)&=f(x_1+iy_1,\cdots,x_n+iy_n)\\&=f(p_n)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f(p_n)}{\partial x_j}x_j+\frac{\partial f(p_n)}{\partial x_n}(x_n-1)\\&\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(p_n)}{\partial y_j}y_j\\&\quad+\frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i\partial x_j}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i\partial x_n}x_i(x_n-1)\\&\quad+\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_n^2}(x_n-1)^2+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i\partial x_n}y_i(x_n-1)\\&\quad+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i\partial y_j}x_iy_j+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i\partial y_j}y_iy_j\Bigg\}+R_3(u),\end{aligned}\tag{3.7.8}$$

这里 $R_3(u)$ 是三阶余项. 显然

$$R_3(u)=O(|1-\bar{u}_n|^{3/2}),$$

故积分 $\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n R_3(u)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}$ 存在，记它的值为 I. 由 (3.7.8)可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n[f(u)-f(p_n)]}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}\\
&=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial f(p_n)}{\partial x_j}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n x_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}\\
&\quad+\frac{\partial f(p_n)}{\partial x_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(p_n)}{\partial y_j}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n y_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n x_i x_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}\right.\\
&\quad+2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i\partial x_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n x_i(x_n-1)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}\\
&\quad+\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_n^2}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}\\
&\quad+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i\partial x_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n y_i(x_n-1)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}\\
&\quad+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i\partial y_j}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n x_i y_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}\\
&\quad\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i\partial y_j}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n y_i y_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n R_3(u)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}.
\end{aligned}$$

根据引理 3.7.2, 3.7.3, 3.7.4, 3.7.5, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{u}_n[f(u)-f(p_n)]}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}\\
&=\left[\frac{1}{2n}+c_n(1-d_n)\right]\frac{\partial f(p_n)}{\partial x_n}+\frac{1}{i}\left(\frac{1}{2n}-c_n d_n\right)\frac{\partial f(p_n)}{\partial y_n}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_j^2}+\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_j^2}\right)\left(-\frac{c_{n+1}}{2n}\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2n}\left(\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_n^2}+\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_n^2}\right)\right\}+I,
\end{aligned}$$

整理以后,即得所要证的结果.

定理 3.7.2　f 如定理 3.7.1 所述, v 是球面上任一点, 那末极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon(v)}\frac{\bar{u}_k[f(u)-f(v)]}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

存在,这里

$$\sigma_\varepsilon(v)=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ \alpha^2(1-|v\bar{u}'|^2)^2+4\beta^2(\operatorname{Im}(v\bar{u}'))^2>\varepsilon^2\}.$$

证　取酉方阵 U, 使 $vU=p_n$, 命 $u=w\bar{U}'$, 记 $\bar{U}'=(\alpha_{ij})$, 则

$$u_k=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jk}w_j,$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_{2n-1}}&\int_{\sigma_\varepsilon(v)}\frac{\bar{u}_k[f(u)-f(v)]}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}\\&=\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\alpha}_{jk}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{w}_j[f(w\bar{U}')-f(p_n\bar{U}')]}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}}\dot{w}\\&\quad+\bar{\alpha}_{nk}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{w}_n[f(w\bar{U}')-f(p_n\bar{U}')]}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}}\dot{w}.\end{aligned}\tag{3.7.9}$$

在上式右边第一项的和式中,由于

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{w}_j}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}}\dot{w}=0,$$

故有

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}&\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{w}_j[f(w\bar{U}')-f(p_n\bar{U}')]}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}}\dot{w}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{\bar{w}_jf(w\bar{U}')}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}}\dot{w}.\end{aligned}$$

在定理 3.6.1 的证明中,已经证明了上述极限存在,由定理 3.7.1 知道(3.7.9)的右边的第二项极限存在.

称(3.7.9)的左边的极限为奇异积分

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_kf(u)}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$

的 Hadamard 主值,记为

$$P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f(u)}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\varepsilon(v)}\frac{\bar{u}_k[f(u)-f(v)]}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}.$$

从定理 3.7.1 可得如下的

定理 3.7.3 f 如定理 3.7.1 所述，那末

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n f(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$
$$=P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n f(u)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}-c_n\frac{\partial f(p_n)}{\partial\bar{u}_n}$$
$$-(c_n-2c_n d_n)\frac{\partial f(p_n)}{\partial u_n}+\frac{c_{n+1}}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_j\partial\bar{u}_j},$$

这里 z 在条件(3.3.1)之下趋于 p_n (条件(3.3.1)可以如前面所讨论的那样，是可以去掉的而代之以 K 极限)。

证 由分解式(3.7.8)可得

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}$$
$$=\frac{f(p_n)}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial f(p_n)}{\partial x_i}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n x_i\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}$$
$$+\frac{\partial f(p_n)}{\partial x_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(p_n)}{\partial y_j}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n y_j\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n-1}}$$
$$+\frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n x_i x_j\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}$$
$$+2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i\partial x_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{x_i(x_n-1)\bar{u}_n}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$
$$+\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_n^2}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n(x_n-1)^2}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$
$$+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i\partial x_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n y_i(x_n-1)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i\partial y_j}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{v}_n x_i y_j}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i\partial y_j}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{v}_n y_i y_j\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\Bigg\}$$

$$+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{v}_n R_3(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}.$$

因为
$$R_3(u)=O(|1-\bar{v}_n|^{\frac{3}{2}}),$$
前已证明
$$|1-z\bar{u}'|\geqslant\frac{1}{M+1}|1-\bar{v}_n|,$$
所以
$$\left|\frac{\bar{u}_n R_3(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\right|\leqslant\frac{K}{|1-\bar{u}_n|^{n-\frac{1}{2}}},$$
此处 K 为常数. 由 Lebesgue 定理,

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{v}_n R_3(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$
$$=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_n R_3(u)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}=I.$$

由引理 3.5.1, 3.5.2 及 3.7.1, 即得

$$\lim_{z\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{v}_n f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}$$
$$=I+\frac{1}{n}\frac{\partial f(p_n)}{\partial u_n}-\frac{1}{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_n\partial\bar{u}_n}. \qquad (3.7.10)$$

但由定理 3.7.1 得

$$I=P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{v}_n f(u)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}}\dot{u}$$
$$-c_n\frac{\partial f(p_n)}{\partial\bar{u}_n}-\left(\frac{1}{n}-2c_n d_n+c_n\right)\frac{\partial f(p_n)}{\partial u_n}$$
$$+\frac{c_{n+1}}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_j\partial\bar{u}_j}+\frac{1}{n}\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_n\partial\bar{u}_n},$$

代入(3.7.10), 即得所要证的.

现在可以证明我们的主要结果

定理 3.7.4 设 f 如定理 3.7.1 所述, $F(z)$ 是 f 在超球上的 Cauchy 型积分. v 是超球面 $u\bar{u}'=1$ 上任一点, 如果 z 从超球内部在条件(3.3.1)之下趋于 v, 那末

$$\lim_{z\to v}\frac{\partial F(z)}{\partial z}=P\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}$$

$$\times\left\{\frac{\partial f(v)}{\partial u}\left[\frac{2\beta}{\alpha+\beta}I-n\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}v'\bar{v}\right]-n\frac{\partial f(v)}{\partial\bar{u}}\bar{v}'\bar{v}\right.$$

$$\left.+\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\bar{v}\left[t_r\left(\frac{\partial^2 f(v)}{\partial u\partial\bar{u}}\right)-v\frac{\partial^2 f(v)}{\partial u\partial\bar{u}}\bar{v}'\right]\right\},\qquad(3.7.11)$$

这里 $u=(u_1,\ \cdots,\ u_n),\ v=(v_1,\ \cdots,\ v_n),$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\left(\frac{\partial F}{\partial z_1},\ \cdots,\ \frac{\partial F}{\partial z_n}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\left(\frac{\partial f}{\partial u_1},\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial u_n}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{u}}=\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{u}_1},\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial\bar{u}_n}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial\bar{u}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial\bar{u}_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial\bar{u}_n}\\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_n\partial\bar{u}_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_n\partial\bar{v}_n}\end{pmatrix}.$$

如同前面那样，条件(3.3.1)是可以去掉的而代之以 K 极限.

证 显然

$$\lim_{z\to v}\frac{\partial F(z)}{\partial z_k}=\lim_{z\to v}\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}.$$

和前面的做法一样，取酉方阵 U，使 $vU=p_n$，若记 $\overline{U}'=(\alpha_{ij})$，则 $v_k=\alpha_{nk}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，作变换 $u=w\overline{U}'$，则

$$u_k=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jk}w_j,$$

于是

$$\lim_{z\to v}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\bar{\alpha}_{jk}\lim_{\zeta\to p_n}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{w}_j f(w\overline{U}')}{(1-\zeta\bar{w}')^{n+1}}\dot{w}.$$

由定理 3.6.1，定理 3.7.3，上式右边等于

$$\sum_{j=1}^{n-1}\bar{\alpha}_{jk}\left\{\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{w}_j f(w\bar{U}')\dot{w}}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}}+\frac{c_{n+1}}{n}\frac{\partial f(p_n\bar{U}')}{\partial w_j}\right\}$$

$$+\bar{\alpha}_{nk}\left\{P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{w}_n f(w\bar{U}')}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}}\dot{w}-\frac{\partial f(p_n\bar{U}')}{\partial\bar{w}_n}c_n\right.$$

$$\left.-(c_n-2c_nd_n)\frac{\partial f(p_n\bar{U}')}{\partial w_n}+\frac{c_{n+1}}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(p_n\bar{U}')}{\partial w_j\partial\bar{w}_j}\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\bar{\alpha}_{jk}P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\bar{w}'=1}\frac{\bar{w}_j f(w\bar{U}')}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}}\dot{w}+\frac{c_{n+1}}{n}$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}\bar{\alpha}_{jk}\frac{\partial f(p_n\bar{U}')}{\partial w_j}-\bar{\alpha}_{nk}\left(c_n-2c_nd_n+\frac{c_{n+1}}{n}\right)\frac{\partial f(p_n\bar{U}')}{\partial w_n}$$

$$-\bar{\alpha}_{nk}c_n\frac{\partial f(p_n\bar{U}')}{\partial\bar{w}_n}+\frac{c_{n+1}}{n}\bar{\alpha}_{nk}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(p_n\bar{U}')}{\partial w_j\partial\bar{w}_j}$$

$$=P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f(u)}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}+\frac{c_{n+1}}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\bar{\alpha}_{jk}\alpha_{jl}\frac{\partial f(v)}{\partial u_l}$$

$$-\bar{\alpha}_{nk}\left(c_n-2c_nd_n+\frac{c_{n+1}}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(v)}{\partial u_j}v_j-\bar{\alpha}_{nk}c_n\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(v)}{\partial\bar{u}_j}\bar{v}_j$$

$$+\frac{c_{n+1}}{n}\bar{\alpha}_{nk}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(v)}{\partial u_j\partial\bar{u}_j}-\frac{c_{n+1}}{n}\bar{\alpha}_{nk}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(v)}{\partial u_i\partial\bar{u}_j}v_i\bar{v}_j$$

$$=P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}+\frac{c_{n+1}}{n}\frac{\partial f(v)}{\partial u_k}$$

$$-\bar{\alpha}_{nk}\left\{\left(c_n-2c_nd_n+\frac{c_{n+1}}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(v)}{\partial u_j}v_j+c_n\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(v)}{\partial\bar{u}_j}\bar{v}_j\right.$$

$$\left.-\frac{c_{n+1}}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(v)}{\partial u_j\partial\bar{u}_j}+\frac{c_{n+1}}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(v)}{\partial u_i\partial\bar{u}_j}v_i\bar{v}_j\right\},$$

把 $c_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}$， $c_n-2c_nd_n+\frac{c_{n+1}}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}$ 代入上式，并乘以 n，即得(3.7.11)。

定理 3.7.5 设 $f=f_1+if_2$ 是定义在 $u\bar{u}'\leqslant 1$ 上的复函数，f_1，f_2 都有三阶连续偏导数，设 $F(z)$ 是 f 在超球上的 Cauchy 型积分，v 是 $u\bar{u}'=1$ 上任一点，如果 z 从超球内部在条件(3.3.1)之下趋于 v，那末(3.7.11)仍然成立。这时定义

$$P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f(u)}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$
$$=P\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f_1(u)}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$
$$+P\frac{i}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}_k f_2(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}.$$

如同前面那样，条件(3.3.1)是可以去掉的而代之以 K 极限.

在上述定理中，如果取 $\alpha=\beta$，则得较为简单形式的公式：

$$\lim_{z\to v}\frac{\partial F(z)}{\partial z}=P\frac{n}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\bar{u}f(u)}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}\dot{u}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial f(v)}{\partial u}-\frac{n}{2}\bar{v}\left\{\frac{\partial f(v)}{\partial u}\bar{v}'-\frac{1}{n}t_r\left(\frac{\partial^2 f(v)}{\partial u\partial\bar{u}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n}v\left(\frac{\partial^2 f(v)}{\partial u\partial\bar{u}}\right)\bar{v}'\right\}.$$

如果 $v_k=0$，即得定理 3.6.2.

第四章　Lie 球双曲空间的 Cauchy 型积分

§4.1　引　言

在绪论中已经提到,华罗庚[1] 证明了圆型有界星形域, Cauchy 核是存在的. 所以对于在域的特征流形上可积的函数, 可以定义 Cauchy 型积分. 华罗庚[1] 还具体地给出了四类典型域的 Cauchy 核.

在这一章中, 我们将讨论第四类典型域 $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 的 Cauchy 型积分. 本章的内容取自龚昇、孙继广[3], 龚昇、史济怀[4].

所谓第四类典型域 $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$, 是指 Lie 球双曲空间, 由满足

$$\begin{cases}1+|zA_0z'|^2-z\bar{z}'>0,\\ 1-|zA_0z'|>0,\end{cases}$$

而

$$A_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\dotplus\frac{1}{2}I^{(N-2)}$$

的 $N(\geqslant 2)$ 个复元素矢量 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_N)$ 所构成. $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 的边界, 记为 $\mathscr{B}_{\mathrm{IV}}$. 特别以 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 表示 $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 的特征流形. 此外, $N(\geqslant 2)$ 个复变数 $z_1, \cdots, z_N$ 空间中的域 $\mathscr{R}^*_{\mathrm{IV}}$, $\mathscr{D}_1$ 及 $\mathscr{D}_2$, 分别指

$$\mathscr{R}^*_{\mathrm{IV}}:\quad\begin{cases}1+|zA_0z'|^2-z\bar{z}'>0,\\ 1-|zA_0z'|<0;\end{cases}$$

$$\mathscr{D}_1:\quad\begin{cases}1+|zA_0z'|^2-z\bar{z}'<0,\\ 1-|zA_0z'|>0,\end{cases}$$

和 $\mathscr{D}_2$: $\begin{cases}1+|zA_0z'|^2-z\bar{z}'<0,\\ 1-|zA_0z'|<0.\end{cases}$

$\mathscr{R}^*_{\text{IV}}$ 的边界，记为 $\mathscr{B}^*_{\text{IV}}$，而 $\mathscr{L}_{\text{IV}}$ 同时也是 $\mathscr{R}^*_{\text{IV}}$ 的特征流形。

若 $\varphi(\xi)$ 是 $\mathscr{L}_{\text{IV}}$ 上的连续函数，则当 $z\in\mathscr{R}_{\text{IV}}$ 或 $z\in\mathscr{R}^*_{\text{IV}}$ 时，Cauchy 型积分

$$V(\mathscr{L}_{\text{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}}H_{\text{IV}}(z,\ \xi)\varphi(\xi)\dot{\xi} \tag{4.1.1}$$

是存在的（华罗庚[1]），此处 $H_{\text{IV}}(z,\ \xi)$ 表示 Cauchy 核

$$(1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}},$$

$V(\mathscr{L}_{\text{IV}})$ 是 $\mathscr{L}_{\text{IV}}$ 的体积，$\dot{\xi}$ 表示 $\mathscr{L}_{\text{IV}}$ 的体积元素。

但当 $z\in\mathscr{D}_1$ 或 $\mathscr{D}_2$，而 $N>2$ 时，Cauchy 核 $H_{\text{IV}}(z,\ \xi)$ 失去意义，因而 Cauchy 型积分 (4.1.1) 不复存在。事实上，任与一点 $z\in\mathscr{D}_1$（或 $\mathscr{D}_2$），必有分解式 $z=e^{i\theta}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ 0,\ \cdots,\ 0)P_0^{-1}\Gamma P_0$，其中 $0\leqslant\lambda_1<1<\lambda_2$（当 $z\in\mathscr{D}_2$ 时，$0<\lambda_1$），

$$P_0=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}\dotplus\sqrt{2}I^{(N-2)},$$

Γ 为一实正交方阵. 对所与之点 z，我们取 $\mathscr{L}_{\text{IV}}$ 上的点

$$\xi=e^{i\theta}\left(\frac{1+\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2},\ 0,\ \sqrt{1-\left(\frac{1+\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2},0,\ \cdots,\ 0\right)P_0(P_0^{-1}\Gamma P_0),$$

则 $1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}'=0$.（当 $N=2$ 时，$\mathscr{R}_{\text{IV}}$ 即双圆柱：$|z_1|<1,\ |z_2|<1$；$\mathscr{R}^*_{\text{IV}}$，$\mathscr{D}_1$ 及 $\mathscr{D}_2$ 分别为 $|z_1|>1,\ |z_2|>1$；$(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)<0,\ |z_1z_2|<1$；$(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)<0,\ |z_1z_2|>1$. 与之相应的 Cauchy 型积分的问题，实即为双圆柱的 Cauchy 型积分的问题，参阅 Какичев[1].）

在这一章中，首先研究 $\mathscr{R}_{\text{IV}}$ 的 Cauchy 型积分(4.1.1)．在定义了 $\mathscr{B}_{\text{IV}}-\mathscr{L}_{\text{IV}}$ 上的 Cauchy 主值之后，我们证明了：满足 Lipschitz 条件的函数，在 $\mathscr{B}_{\text{IV}}-\mathscr{L}_{\text{IV}}$ 上的 Cauchy 主值是存在的，而且给出了从 $\mathscr{R}_{\text{IV}}$ 的内部趋于 $\mathscr{B}_{\text{IV}}-\mathscr{L}_{\text{IV}}$ 时，Cauchy 型积分的

极限值. 与第一章一样, 对于 $\mathscr{B}_{\mathrm{IV}}-\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上的点, 也可以有多种方法定义 Cauchy 主值. 所以 Cauchy 型积分的极限值, 当从 $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 的内部趋于 $\mathscr{B}_{\mathrm{IV}}-\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 时, 有多种表达形式. 我们还证明了: $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 上的任一 B-调和函数在 $\mathscr{B}_{\mathrm{IV}}-\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上的值, 必可用它的 B-调和共轭函数在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上的值通过积分表出.

至于当 z 从 $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 的内部趋于 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 时, 有这样的结果: 当 $N=2n(n\geqslant 1)$ 时, 如果 $\varphi(\xi)=\varphi(e^{i\theta}xp_0)=\varphi_0(e^{i\theta})$ 对 $e^{i\theta}$ 具有 $n-1$ 阶连续微商, 并且它对 $e^{i\theta}$ 的 k 阶微商 $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ 在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上属于 $\operatorname{Lip} p(0<p\leqslant 1)$; 当 $N=2n+1(n\geqslant 1)$ 时, 如果 $\varphi(\xi)=\varphi(e^{i\theta}xp_0)=\varphi_0(e^{i\theta})$ 对 $e^{i\theta}$ 具有 $n+1$ 阶连续微商, 并且它对 $e^{i\theta}$ 的 k 阶微商 $(0\leqslant k\leqslant n+1)$ 在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上连续, 则 Cauchy 型积分(4.1.1) 在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上的极限值是存在的, 且表达形式是唯一的.

利用解析变换 $w=(zA_0z')^{-1}z(z\in\mathscr{R}_{\mathrm{IV}},\ w\in\mathscr{R}^*_{\mathrm{IV}})$, 不难得到 $\mathscr{R}^*_{\mathrm{IV}}$ 上的 Cauchy 型积分的相应的结果.

在讨论中所用到的有关 $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 的已知事实(例如 $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 的运动群 Γ^{IV}, 原点的固定分群 Γ_0^{IV} 等等), 可参阅华罗庚[1].

§4.2 二 条 引 理

根据 Cauchy 积分公式, 我们有

$$V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}} H_{\mathrm{IV}}(z,\ \xi)\dot{\xi}=1, \tag{4.2.1}$$

其中

$$z=(z_1,\ \cdots,\ z_N)\in\mathscr{R}_{\mathrm{IV}},$$

$$\xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_N)=e^{i\theta}xP_0\in\mathscr{L}_{\mathrm{IV}},$$

$$xx'=1,\quad \dot{\xi}=2^{\frac{N}{2}}d\theta\cdot\dot{x}.$$

特别取 $z=(0,\ \rho,\ 0,\ \cdots,\ 0)$, $0\leqslant\rho<1$, 有 $zA_0z'=0$, 于是

$$1=V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}}(1-\rho\xi_2)^{-\frac{N}{2}}\dot{\xi}$$

$$=2^{\frac{N}{2}}V(\mathscr{L}_{\text{IV}})^{-1}\int_{xx'=1}\dot{x}\int_0^{\pi}(1-\rho e^{-i\theta}(x_1+ix_2))^{-\frac{N}{2}}d\theta.$$

作变换 $y_1+iy_2=e^{-i\theta}(x_1+ix_2)$, $y_3=x_3$, $\cdots$, $y_N=x_N$, $\theta=\theta$, 则有

$$1=2^{\frac{N}{2}}V(\mathscr{L}_{\text{IV}})^{-1}\int_{yy'=1}(1-\rho(y_1+iy_2))^{-\frac{N}{2}}\dot{y}\int_0^{\pi}d\theta$$

$$=\omega_{N-1}^{-1}\int_{yy'=1}(1-\rho(y_1+iy_2))^{-\frac{N}{2}}\dot{y}, \tag{4.2.2}$$

此处 $\omega_{N-1}=2^{-\frac{N}{2}}\pi^{-1}V(\mathscr{L}_{\text{IV}})=2\pi^{\frac{N}{2}}\Big/\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)$ 是 $yy'=1$ 的体积.

我们来证明如下的二条引理.

引理 4.2.1 设 $y=(y_1, \cdots, y_N)$, $yy'=1$, 则

$$\lim_{\varepsilon\to0}\omega_{N-1}^{-1}\int_{\substack{yy'=1\\ \alpha^2(1-y_1)^2+\beta^2y_2\geq\varepsilon^2}}(1-(y_1+iy_2))^{-\frac{N}{2}}\dot{y}$$

是存在的, 且等于 $1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{N}{2}-1}$, 这里 ω_{N-1} 为 $yy'=1$ 的体积, $\dot{y}$ 为 $yy'=1$ 的体积元素.

证 当 $N=2$ 时, 引理的结论是复变数函数论中熟知的事实. 当 $N=2n$ 时, 即为引理 1.6.1, 因此, 只需讨论 $N=2n+1$, $n\geq1$ 的情形.

由 (4.2.2), 只要证明

$$I=\frac{1}{\omega_{2n}}\int_{\substack{yy'=1\\ \alpha^2(1-y_1)^2+\beta^2y_2^2<\varepsilon^2}}\frac{\dot{y}}{(1-(y_1+iy_2))^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

命 $y_1+iy_2=re^{i\varphi}$, $v=(y_3, \cdots, y_{2n+1})$, 如同引理 1.6.1 的证明那样可得

$$I=\frac{1}{\omega_{2n}}\int_{vv'<\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}}\dot{v}\int_{-a}^{a}\frac{d\varphi}{(1-\rho re^{i\varphi})^{n+\frac{1}{2}}},$$

这里

$$a=\cos^{-1}\frac{t-\sqrt{(1-t)(t+r^2(1-2t))+(2t-1)s^2}}{r(2t-1)},$$

$$t=\alpha^2,\ 1-t=\beta^2.$$

如果 $\alpha\neq\beta$; $$a=\cos^{-1}\frac{1+r^2-s^2}{2r},$$

如果 $\alpha=\beta$. 记

$$J=\int_{-a}^{a}(1-\rho r\,e^{i\varphi})^{-\frac{N}{2}}d\varphi=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+p\right)}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}\int_{-a}^{a}(\rho r)^p e^{ip\varphi}d\varphi$$

$$=2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+p\right)}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}(\rho r)^p\frac{\sin pa}{p}+2a$$

$$=2\operatorname{Im}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+p\right)}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}\frac{(\rho r e^{ia})^p}{p}\right\}+2a.$$

令 $1-x=y^2$, 易知

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+p\right)x^{p-1}}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}=\frac{1-y^N}{(1-y^2)y^N}=\frac{1+y+y^2+\cdots+y^{N-1}}{(1+y)y^N}$$

$$=\frac{1}{(1+y)y}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{y^5}+\cdots+\frac{1}{y^{2n+1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(1-x)^{k+\frac{1}{2}}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}},$$

因而

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+p\right)x^p}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)p}=\int_0^x\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+p\right)x^{p-1}}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{k-\frac{1}{2}}}+2\log\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}-2,$$

所以

$$J=2\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)(1-\rho re^{i\alpha})^{k-\frac{1}{2}}}+2\log\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho re^{i\alpha}}}\right\}+2a.$$

于是

$$I=\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{vv'<g(\varepsilon)}\mathrm{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)(1-\rho re^{i\alpha})^{k-\frac{1}{2}}}+2\log\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho re^{i\alpha}}}\right\}\dot{v}+\frac{2a}{\omega_{N-1}}\int_{vv'<g(\varepsilon)}\dot{v}$$

$$=\frac{2}{\omega_{N-1}}\mathrm{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n}L_k+L_0\right\}+L_*,$$

其中

$$L_*=\frac{2a}{\omega_{N-1}}\int_{vv'<g(\varepsilon)}\dot{v}=O(\varepsilon^{\frac{N}{2}}),$$

$$L_k=\int_{vv'<g(\varepsilon)}\frac{\dot{v}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)(1-\rho re^{i\alpha})^{k-\frac{1}{2}}},\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

$$L_0=2\int_{vv'<g(\varepsilon)}\log\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho re^{i\alpha}}}\dot{v},$$

这里 $g(\varepsilon)$ 当 $\alpha=\beta$ 时为 $2\varepsilon-\varepsilon^2$；当 $\alpha\neq\beta$ 时为 $\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}$. 应用引理 1.6.1 的证明方法，易得

$$\lim_{\rho\to1}L_k=O(\varepsilon^{n-k}),\quad 1\leqslant k\leqslant n-1,$$

$$\mathrm{Im}L_0=O(1)\quad(\varepsilon\to0).$$

现在分别对 $\alpha=\beta$ 及 $\alpha\neq\beta$ 的二种情形来讨论 L_n. 先讨论 $\alpha=\beta$ 的情形.

由 a 的定义知

$$re^{i\alpha}=\frac{2-vv'-\varepsilon^2}{2}+\frac{i}{2}(2\varepsilon^2(2-vv')-(vv')^2-\varepsilon^4)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$$L_n=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\int_{vv'<2\varepsilon-\varepsilon^2}\frac{\dot{v}}{\left\{\left[1-\rho+\rho\frac{vv'+\varepsilon^2}{2}-\frac{i\rho}{2}\left(2\varepsilon^2(2-vv')-(vv')^2-\varepsilon^4\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{n-\frac{1}{2}}\right\}}.$$

用球坐标 $y_3=s\cos\varphi_1$, $y_4=s\sin\varphi_1\cos\varphi_2$, $\cdots$, $y_{2n+1}=s\sin\varphi_1$, $\cdots$, $\sin\varphi_{2n-2}$, 其中 $1-r^2=v\bar{v}'$, 则

$$L_n=\frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)}\times\int_0^{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}\frac{s^{2n-2}ds}{\left(1-\rho+\rho\frac{\varepsilon^2+s^2}{2}-\frac{i\rho}{2}\sqrt{2\varepsilon^2(2-s^2)-s^4-\varepsilon^4}\right)^{n-\frac{1}{2}}},$$

当 $\varepsilon>0$ 固定时，同引理 1.2.1 的证明一样，可应用 Lebesgue 定理,得到

$$J_n=\lim_{\rho\to1}L_n=\frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)}\times\int_0^{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}\frac{s^{2n-2}ds}{\left(\frac{\varepsilon^2+s^2}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{4\varepsilon^2-(s^2+\varepsilon^2)^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

记 $\eta=\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}$, $s=\eta R$, 于是

$$J_n=\frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)}\times\int_0^1\frac{R^{2n-2}dR}{\left(\frac{R^2+\varepsilon^2\eta^{-2}}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{4\eta^{-4}\varepsilon^2-(R^2+\varepsilon^2\eta^{-2})^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

再应用 Lebesgue 定理,可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_n=\frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)}\int_0^1\frac{R^{2n-2}\,dR}{\left(\frac{R^2}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{1-R^4}\right)^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(2\pi)^{\frac{2n-1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\frac{t^{n-\frac{3}{2}}\,dt}{\left(t-i\sqrt{1-t^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta}\cos^{n-\frac{3}{2}}\theta\sin\theta\,d\theta.$$

注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-\frac{3}{2}}\theta\,\sin\theta\,e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{-e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta}\cos^{n-\frac{1}{2}}\theta}{n-\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-\frac{1}{2}}\theta\,e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}+i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-\frac{1}{2}}\theta\,e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta}\,d\theta.$$

所以

$$\operatorname{Im}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}J_n\right)=\frac{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-\frac{1}{2}}\theta\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\,d\theta$$

$$=\frac{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\pi}{2^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{\pi^{n+\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

由上可知，当 $\alpha=\beta$ 时，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\rho\to 1}I=\frac{2}{\omega_{N-1}}\cdot\frac{\pi^{n+\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{2\pi^{\frac{N}{2}}}\,\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

再讨论 $\alpha\neq\beta$ 的情形。

由 α 的定义知

$$re^{i\alpha}=\frac{t-Q}{2t-1}+i\frac{\sqrt{r^2(2t-1)t-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt}}{|2t-1|},$$

此处 $Q=\sqrt{(1-t)(t+r^2(1-2t))+(2t-1)\varepsilon^2}$.

于是

$$L_n=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\int_{v\bar{v}'<\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}}\Big[1-\rho\frac{t-Q}{2t-1}$$

$$-i\frac{\sqrt{r^2(2t-1)t-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt}}{|2t-1|}\Big]^{-n+\frac{1}{2}}\dot{v}.$$

如前那样，由 Lebesgue 定理，用球坐标，可得

$$J_n=\lim_{\rho\to1}L_n=\frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)}\times\int_0^{\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}}}\Big[\frac{t+Q-1}{2t-1}$$

$$-i\frac{\sqrt{t(2t-1)(1-s^2)-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt}}{|2t-1|}\Big]^{-n+\frac{1}{2}}s^{2n-2}ds,$$

记 $$\eta=\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}}-\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}},\quad s=\eta R,$$

则

$$J_n=\frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)}\int_0^1\Big[\frac{t+Q-1}{2t-1}$$

$$-i\frac{\sqrt{t(2t-1)(1-\eta^2R^2)-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt}}{|2t-1|}\Big]^{-n+\frac{1}{2}}\eta^{2n-1}R^{2n-2}dR.$$

如引理 1.6.1 中所证,

$$\eta^{-2}\frac{t-1+Q}{2t-1}=\frac{R^2}{2}+O(\varepsilon),$$

$$\frac{\eta^{-2}}{|2t-1|}\{t(2t-1)(1-\eta^2R^2)-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}(1-R^4)^{\frac{1}{2}}+O(\varepsilon).$$

故得

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_n = \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{R^{2n-2}\,dR}{\left[R^2 - i\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-R^4}\right]^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{u^{n-\frac{3}{2}}\,du}{\left[u - i\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-u^2}\right]^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{3}{2}}\theta\sin\theta\,d\theta}{(\cos\theta - ib\sin\theta)^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(b = \sqrt{\frac{t}{1-t}}\right).$$

由于

$$\frac{\cos^{n-\frac{3}{2}}\theta\sin\theta}{(\cos\theta - ib\sin\theta)^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{i}\,\frac{1}{(1+b)^{n-\frac{1}{2}}} \times \frac{(e^{2i\theta}+1)^{n-\frac{3}{2}}(e^{2i\theta}-1)}{(1+de^{2i\theta})^{n-\frac{1}{2}}} \quad \left(d = \frac{1-b}{1+b}\right),$$

故

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_n = \frac{1}{i(1+b)^{n-\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2i\theta}-1)(e^{2i\theta}+1)^{n-\frac{3}{2}}}{(1+de^{2i\theta})^{n-\frac{1}{2}}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{i(1+b)^{n-\frac{1}{2}}} \lim_{\xi\to 1^-} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2i\theta}-1)(1+\xi e^{2i\theta})^{n-\frac{3}{2}}}{(1+de^{2i\theta})^{n-\frac{1}{2}}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{i(1+b)^{n-\frac{1}{2}}} \lim_{\xi\to 1^-} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(n-\frac{1}{2}+q-1\right)\cdots\left(n-\frac{1}{2}-p\right)}{p!\,q!}$$

$$\cdot(-1)^q d^q \frac{\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots(n-p+1)}{p!} e^{2i(p+q)\theta}\xi^p(e^{2i\theta}-1)\,d\theta$$

$$= \text{实数} + i\,\frac{1}{(1+b)^{n-\frac{1}{2}}}\,\frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\operatorname{Im}\lim_{\varepsilon\to 0} J_n=\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im} J_n=\frac{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(1+b)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

最后得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I=\frac{2}{\omega_{N-1}}\cdot\frac{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\pi}{2}\frac{1}{(1+b)^{n-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

这就证明了引理 4.2.1.

引理 4.2.2 设 $y=(y_1,\cdots,y_N)$, $yy'=1$, 则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_{N-1}^{-1}\int_{yy'=1-\{y\mid yy'=1,1-y_1<\alpha\varepsilon,|y_2|<\beta\varepsilon\}}(1-(y_1+iy_2))^{-\frac{N}{2}}\dot{y}$$

是存在的，且等于

$$1-\frac{2^{\frac{N}{2}-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}}\cos^{n-2}t\,\frac{\sin(n-1)t}{\sin t}\,dt\right\},$$

这里 ω_{N-1} 为 $yy'=1$ 的体积，$\dot{y}$ 为 $yy'=1$ 的体积元素.

当 $N=2n$ 时，即为引理 1.8.1，而当 $N=2n+1$, $n\geqslant 1$ 时，可以参照引理 4.2.1 的方法同样证明之. 从略.

§4.3 在 $\mathscr{B}_{\mathrm{IV}}-\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上的 Cauchy 主值

在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上任与一函数 $\varphi(\xi)$，如果对于 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上任意两点 ξ 与 ξ^* 恒有

$$|\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*)|=O(((\xi-\xi^*)\overline{(\xi-\xi^*)}')^{\frac{p}{2}}),\quad(4.3.1)$$

$0<p\leqslant 1$, 则称 $\varphi(\xi)$ 在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上属于 $\operatorname{Lip}p$.

定理 4.3.1 若 $\varphi(\xi)$ 在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上属于 $\operatorname{Lip}p\,(0<p\leqslant 1)$, 则当 $\eta_0=e^{i\theta_0}(t,1,0,\cdots,0)p_0^{-1}\Gamma p_0\in\mathscr{B}_{\mathrm{IV}}-\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 时，Cauchy 主值

$$\text{v.p.}\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}}H_{\mathrm{IV}}(\eta_0,\xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\ |1+\eta_0A_0\eta'\overline{A_0\xi' L}-\eta_0\bar{\xi}'|\geq\varepsilon|1-z_0\bar{z}'|}} H_{\mathrm{IV}}(\eta_0,\ \xi)\varphi(\xi)\dot{\xi} \tag{4.3.2}$$

是存在的，其中 $z_0=e^{i\theta_0}(t,\ 0,\ \cdots,\ 0)P_0^{-1}I'P_0$. 特别地，当

$$\eta_0=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

时，有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v.\,p.}\ \frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}}(1-\bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}}\varphi(\xi)\dot{\xi}\\
&\quad=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\ |1-\bar{\xi}_2|\geq\varepsilon}}(1-\bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}}\varphi(\xi)\dot{\xi}\\
&\quad=\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}}(1-\bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\dot{\xi}\\
&\qquad+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\xi^*)d\theta,
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

这里 $\xi^*=(e^{2i\theta},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$.

证　(i) 首先取 $\eta_0=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\in\mathscr{B}_{\mathrm{IV}}-\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$.

当 $\xi=e^{i\theta}xP_0$, $0\leqslant\theta<\pi$, $xx'=1$, 取

$$\xi^*=(e^{2i\theta},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\in\mathscr{L}_{\mathrm{IV}},$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\ |1-\bar{\xi}_2|\geq\varepsilon}}(1-\bar{\xi}_2)^{\frac{N}{2}}\varphi(\xi)\dot{\xi}\\
&\quad=\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\ |1-\bar{\xi}_2|\geq\varepsilon}}(1-\bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\dot{\xi}\\
&\qquad+\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\ |1-\bar{\xi}_2|\geq\varepsilon}}(1-\bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}}\varphi(\xi^*)\dot{\xi}=I_1+I_2.
\end{aligned}$$

令
$$y_1+iy_2=e^{-i\theta}(x_1+ix_2),$$
$$y_3=x_3,\ \cdots,$$
$$y_N=x_N,$$

由引理 4.2.1, 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2^{\frac{N}{2}}\pi}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{yy'=1\\|1-y_1-iy_2|>\varepsilon}}(1-y_1-iy_2)^{-\frac{N}{2}}\dot{y}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\xi^*)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi((e^{2i\theta},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0))d\theta. \tag{4.3.4}$$

注意到

$$\begin{aligned}(\xi-\xi^*)\overline{(\xi-\xi^*)}' &= \xi\bar{\xi}'+\xi^*\bar{\xi}'^*-\xi\bar{\xi}'^*-\xi^*\bar{\xi}'\\ &=4-e^{2i\theta}\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2-e^{-2i\theta}\xi_1-\xi_2\\ &=4-e^{i\theta}(x_1-ix_2)-e^{-i\theta}(x_1+ix_2)\\ &\quad -e^{-i\theta}(x_1+ix_2)-e^{i\theta}(x_1-ix_2)\\ &=2[2-(y_1-iy_2)-(y_1+iy_2)]\\ &=4(1-y_1),\end{aligned}$$

所以有

$$|\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*)|=O(((\xi-\xi^*)\overline{(\xi-\xi^*)}')^{\frac{p}{2}})=O((1-y_1)^{\frac{p}{2}}).$$

于是

$$\begin{aligned}|I_1| &\leqslant K\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\|1-\xi_2|>\varepsilon}}\frac{(1-y_1)^{\frac{p}{2}}}{|1-y_1-iy_2|^{\frac{N}{2}}}\dot{\xi}\\ &\leqslant K\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\|1-y_1-iy_2|>\varepsilon}}\frac{\dot{\xi}}{|1-y_1-iy_2|^{\frac{N-p}{2}}}\\ &=K\int_{y^{(0)}y^{(0)\prime}<1}\dot{y}^{(0)}\int_{|\alpha|>a}\frac{d\alpha}{|1-re^{i\alpha}|^{\frac{N-p}{2}}},\end{aligned}$$

此处 $y_1+iy_2=re^{i\alpha}$, $y^{(0)}=(y_3,\ \cdots,\ y_N)$, $a=\cos^{-1}\dfrac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r}$.

当 $N\geqslant 5$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_{|\alpha|>a}\frac{d\alpha}{|1-re^{i\alpha}|^{\frac{N-p}{2}}} &\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{|1-re^{i\alpha}|^{\frac{N-p}{2}}}\\ &\leqslant\frac{1}{(1-r)^{\frac{N-p}{2}-2}}\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{|1-re^{i\alpha}|^2}=O((1-r^2)^{\frac{p}{2}+1-\frac{N}{2}}).\end{aligned}$$

利用球坐标，令 $s=\sqrt{1-r^2}$，可得

$$\int_{y^{(0)}y^{(0)\prime}<1}(1-r^2)^{\frac{p-N}{2}+1}\dot{y}^{(0)}=O\left(\int_0^1 s^{N-3}\cdot s^{p+2-N}\,ds\right)$$

$$=O\left(\int_0^1 s^{p-1}\,ds\right)=O(1)\quad(\varepsilon\to 0).$$

当 $N=4$ 时，可按第一章 § 1.3 中的方法处理，同样得到 $|I_1|=O(1)\ (\varepsilon\to 0)$.

当 $N=3$ 时，取球坐标

$$y_1=\cos\theta_1,\ y_2=\sin\theta_1\cos\theta_2,$$

$$y_3=\sin\theta_1\sin\theta_2\quad(0\leqslant\theta_1<\pi,\ 0\leqslant\theta_2<2\pi),$$

于是有

$$\int_{\substack{yy'=1\\|1-y_1-iy_2|>\varepsilon}}\frac{\dot{y}}{|1-y_1-iy_2|^{\frac{3-p}{2}}}$$

$$=\iint\limits_{\substack{0<\theta_1<\pi\\0<\theta_2<2\pi\\(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2>\varepsilon^2}}\frac{\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\theta_2}{[(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2]^{\frac{3-p}{4}}}$$

$$=\iint\limits_{\substack{\frac{\pi}{2}<\theta_1<\pi\\0<\theta_2<2\pi\\(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2>\varepsilon^2}}+\iint\limits_{\substack{0<\theta_1<\frac{\pi}{2}\\0<\theta_2<2\pi\\(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2>\varepsilon^2}}=J_1+J_2.$$

J_1 显然是有界的. 对于 J_2，只需估计

$$\psi(\varepsilon)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta_1\,d\theta_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta_2}{((1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2)^{\alpha}},$$

此处 $\alpha=\dfrac{3-p}{4}$，$\dfrac{1}{2}\leqslant\alpha<\dfrac{3}{4}$. 令 $\cos\theta_1=x_1$，$\cos 2\theta_2=x_2$，则

$$\psi(\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_0^{\cos\varepsilon}\frac{dx_1}{(1-x_1)^{\alpha}}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left[(1-x_1)+(1+x_1)\dfrac{1+x_2}{2}\right]^{\alpha}\sqrt{1-x_2^2}}.$$

再令 $\dfrac{1+x_2}{2}=y$，则

$$\psi(\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_0^{\cos\varepsilon}\frac{dx_1}{(1-x_1)^{\alpha}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y(1-y^2)}[(1-x_1)+(1+x_1)y]^{\alpha}}.$$

记
$$J_3=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y(1-y^2)}\,[(1-x_1)+(1+x_1)y]^{\alpha}},$$
并取 $\lambda=\frac{4-p}{2}$, $\mu=\frac{4-p}{2-p}$, 显然有 $\lambda>1$, $\mu>1$, $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=1$ 以及 $\frac{\lambda}{2}<1$, $\alpha\mu>1, 2\alpha-\frac{1}{\mu}<1$. 于是应用 Hölder 不等式, 有

$$J_3\leqslant\left(\int_0^1\frac{dy}{(y(1-y^2))^{\frac{\lambda}{2}}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\left(\int_0^1\frac{dy}{(1-x_1)+(1+x_1)y)^{\alpha\mu}}\right)^{\frac{1}{\mu}}$$
$$=K_1\left(\frac{1}{\alpha\mu-1}((1-x_1)+(1+x_1)y)^{1-\alpha\mu}\Big|_1^0\right)^{\frac{1}{\mu}}$$
$$=K_2\left(\frac{1}{(1-x_1)^{\alpha\mu-1}}-\frac{1}{2^{\alpha\mu-1}}\right)^{\frac{1}{\mu}}\leqslant K_3\frac{1}{(1-x_1)^{\alpha-\frac{1}{\mu}}},$$

其中 K_1, K_2, K_3 皆为绝对常数, 所以有

$$\psi(s)=O\left(\int_0^{\cos s}\frac{dx_1}{(1-x_1)^{2\alpha-\frac{1}{\mu}}}\right)=O(1),$$

因而 $|I_1|=O(1)\,(\varepsilon\to0)$ 对于 $N=3$ 时亦成立.

当 $N=2$ 时, 令 $y_1=\cos\theta$, $y_2=\sin\theta$, 则

$$\int\limits_{\substack{yy'=1\\|1-y_1-iy_2|>\varepsilon}}\frac{\dot{y}}{|1-y_1-iy_2|^{\frac{2-p}{2}}}=\int\limits_{\substack{0<\theta<2\pi\\4\sin^2\frac{\theta}{2}>\varepsilon^2}}\frac{d\theta}{\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2-p}{4}}}$$
$$=O\left(\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\theta^{-1+\frac{p}{2}}d\theta\right)=O(1)\quad(\varepsilon\to0).$$

于是, 当 $N\geqslant2$ 时, $|I_1|=O(1)\,(\varepsilon\to0)$ 恒成立, 所以我们得到

$$\text{v. p.}\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}}(1-\xi_2)^{-\frac{N}{2}}\varphi(\xi)\dot{\xi}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\|1-\xi_2|>\varepsilon}}(1-\xi_2)^{-\frac{N}{2}}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\dot{\xi}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\xi^*)d\theta. \tag{4.3.5}$$

必须指出, 上式右端第一项, 乃是通常积分

$$I=V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}}(1-\xi_2)^{-\frac{N}{2}}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\dot{\xi}.$$

事实上，可写

$$I=V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\rm IV}\\|1-\xi_2|>\varepsilon}}(1-\xi_2)^{-\frac{N}{2}}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\dot{\xi}$$

$$+V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\rm IV}\\|1-\xi_2|<\varepsilon}}(1-\xi_2)^{-\frac{N}{2}}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\dot{\xi}=I_1+I_0,$$

而

$$|I_0|\leqslant K\int_{\substack{yy'=1\\|1-y_1-iy_2|<\varepsilon}}\frac{\dot{y}}{|1-y_1-iy_2|^{\frac{N-p}{2}}}\quad(K\text{ 为一常数}),$$

取球坐标 $y_1=\cos\theta_1, y_2=\sin\theta_1\cos\theta_2, \cdots, y_N=\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{N-1}(0\leqslant\theta_1, \cdots, \theta_{N-2}<\pi, 0\leqslant\theta_{N-1}<2\pi)$，则当 $N\geqslant4$ 时，有

$$|I_0|=O\Bigg(\iint\limits_{\substack{0<\theta_1,\theta_2<\pi\\(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2<\varepsilon^2}}\times\frac{\sin^{N-2}\theta_1\sin^{N-3}\theta_2\,d\theta_1\,d\theta_2}{[(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2]^{\frac{N-p}{4}}}\Bigg).$$

利用第一章 § 1.4 中完全相同的计算，可得

$$|I_0|=O\Big(\int_0^{\sqrt{\varepsilon}}\theta_1^{-1+p}\,d\theta_1\Big)=O(\varepsilon^{\frac{p}{2}}).$$

当 $N=3$ 时，应用本节估计 $|I_1|$ 的方法，采用同样的符号，易知有

$$|I_0|=O\Big(\int_0^{\sqrt{\varepsilon}}\sin\theta_1\,d\theta_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta_2}{((1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2)^\alpha}\Big)$$

$$=O\Big(\int_{\cos\sqrt{\varepsilon}}^1\frac{dx_1}{(1-x_1)^\alpha}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y(1-y^2)}\,((1-x_1)+(1+x_1)y)^\alpha}\Big)$$

$$=O\Big(\int_{\cos\sqrt{\varepsilon}}^1\frac{dx_1}{(1-x_1)^{2\alpha-\frac{1}{\mu}}}\Big)=O\big((1-\cos\sqrt{\varepsilon})^{1+\frac{1}{\mu}-2\alpha}\big)$$

$$=O(\varepsilon^{1+\frac{1}{\mu}-2\alpha}),$$

其中 $1+\frac{1}{\mu}-2\alpha>0$.

当 $N=2$ 时，令 $y_1=\cos\theta$, $y_2=\sin\theta$, 则

$$|I_0|=O\left(\int_{\substack{0<\theta<2\pi\\ 4\sin^2\frac{\theta}{2}<\varepsilon^2}}\frac{d\theta}{\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2-p}{4}}}\right)$$

$$=O\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\theta_1^{-1+\frac{p}{2}}d\theta_1\right)=O(\varepsilon^{\frac{p}{2}}).$$

总之，我们有 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}I_0=0$, 因而 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}I_1=I$. 即 (4.3.5) 就是 (4.3.3).

(ii) 在 $\mathscr{B}_{\mathrm{IV}}-\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上任取一点

$$\eta_0=e^{i\theta_0}(t,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)P_0^{-1}\Gamma P_0,$$

首先利用 Γ_0^{IV} 中的变换 $z=e^{i\theta_0}\tilde{z}P_0^{-1}\Gamma P_0$, 使 $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 内的点

$$z=e^{i\theta_0}(t,\ \rho,\ 0,\ \cdots,\ 0)P_0^{-1}\Gamma P_0$$

变为 $\tilde{z}=(t,\ \rho,\ 0,\ \cdots,\ 0)$, 使 η_0 变为 $\tilde{\eta}_0=(t,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$. 再利用 Γ^{IV} 中将 $\tilde{z}_0=(t,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 变为原点的变换 $w=\Phi(\tilde{z})$, 将 $\tilde{z}$ 变为 $w=(0,\ \rho,\ 0,\ \cdots,\ 0)$, 将 $\tilde{\eta}_0$ 变为 $\zeta_0=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$. 在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上，上述变换为 $\xi=e^{i\theta_0}\tilde{\xi}P_0^{-1}\Gamma P_0$ 和 $\zeta=\Phi(\tilde{\xi})$.

由于在变换 $w=\Phi(\tilde{z})$ 下，有

$$1+wA_0w'\overline{\zeta A_0\zeta'}-w\bar{\zeta}'$$

$$=\frac{(1+\tilde{z}A_0\tilde{z}'\overline{\tilde{\xi}A_0\tilde{\xi}'}-\tilde{z}\bar{\tilde{\xi}}')(1+|\tilde{z}_0A_0\tilde{z}_0'|^2-\tilde{z}_0\bar{\tilde{z}}_0')}{(1+\tilde{z}A_0\tilde{z}'\overline{\tilde{z}_0A_0\tilde{z}_0'}-\tilde{z}\bar{\tilde{z}}_0')(1+\tilde{z}_0A_0\tilde{z}_0'\overline{\tilde{\xi}A_0\tilde{\xi}'}-\tilde{z}_0\bar{\tilde{\xi}}')},$$

(见下面的附注)，并注意到 $wA_0w'=0$, $\tilde{z}_0A_0\tilde{z}_0'=0$, $\tilde{z}_0A_0\tilde{\xi}_0'=0$, $\tilde{z}_0\bar{\tilde{z}}_0'=\tilde{z}_0\bar{\tilde{\xi}}_0'=t^2$, 于是有

$$1-w\bar{\zeta}'=(1+\tilde{z}A_0\tilde{z}'\overline{\tilde{\xi}A_0\tilde{\xi}'}-\tilde{z}\bar{\tilde{\xi}}')(1-\tilde{z}_0\bar{\tilde{\xi}}')^{-1}.$$

令 $w\to\zeta_0$, 相应地 $\tilde{z}\to\tilde{\eta}_0$, 便得到

$$|1-\zeta_0\bar{\zeta}'|=|1+\tilde{\eta}_0A_0\tilde{\eta}_0'\overline{\tilde{\xi}A_0\tilde{\xi}'}-\tilde{\eta}_0\bar{\tilde{\xi}}'|/|1-\tilde{z}_0\bar{\tilde{\xi}}'|.$$

因此，

$$\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{V}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\|1+\eta_0A_0\eta_0'\overline{\xi A_0\xi'}-\eta_0\bar{\xi}'|\geq\varepsilon|1-z_0\bar{\xi}'|}} H_{\mathrm{IV}}(z,\xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

$$=\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{V}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\|1+\tilde{\eta}_0A_0\tilde{\eta}_0'\overline{\xi A_0\xi'}-\tilde{\eta}_0\bar{\xi}'|\geq\varepsilon|1-z_0\bar{\xi}'|}}$$

$$\times H_{\mathrm{IV}}(\tilde{z},\tilde{\xi})\varphi(e^{i\theta_0}\tilde{\xi}P_0^{-1}\Gamma P_0)\dot{\tilde{\xi}}$$

$$=\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\|1-\zeta_0\bar{\zeta}'|\geq\varepsilon}}\varphi(e^{i\theta_0}\Phi^{-1}(\zeta)P_0^{-1}\Gamma P_0)(1-\tilde{\xi}\bar{z}_0')^{\frac{N}{2}}$$

$$\times(1-\tilde{z}\bar{z}_0')^{-\frac{N}{2}}(1-w\bar{\zeta}')^{-\frac{N}{2}}\dot{\zeta}.$$

再在上式中令 $z\to\eta_0$，相应地，$\tilde{z}\to\tilde{\eta}_0$，$w\to\zeta_0$，并记

$$\psi(\zeta)=\varphi(e^{i\theta_0}\Phi^{-1}(\zeta)P_0^{-1}\Gamma P_0)(1-\Phi^{-1}(\zeta)\bar{z}_0')^{\frac{N}{2}}$$

$$\times(1-\tilde{\eta}_0\bar{z}_0')^{-\frac{N}{2}},$$

则有

$$\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\|1+\eta_0A\eta_0'\overline{\xi A_0\xi'}-\eta_0\bar{\xi}'|\geq\varepsilon|1-z_0\bar{\xi}'|}} H_{\mathrm{IV}}(\eta_0,\xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

$$=\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\|1-\zeta_0\bar{\zeta}'|\geq\varepsilon}}(1-\zeta_0\bar{\zeta}')^{-\frac{N}{2}}\psi(\zeta)\dot{\zeta}.$$

令 $\varepsilon\to0$，由于 $\psi(\zeta)$ 显然在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上满足 Lip p，所以由(i)可知

$$\text{v. p.}\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}} H_{\mathrm{IV}}(\eta_0,\xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

是存在的，而且不难求出与(4.3.3)相似的表达式. 此处从略.

附注 我们可以在 Γ^{IV} 中取出一个将 $z_0\in\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 变至原点的变换 $w=\Phi(z)$，w，$z\in\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$，相应地，$\zeta=\Phi(\xi)$，$\zeta$，$\xi\in\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$，使得经过这个变换，有

$$1+wA_0w'\overline{\zeta A_0\zeta'}-w\bar{\zeta}'$$

$$=\frac{(1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}')(1+|z_0A_0z_0'|^2-z_0\bar{z}_0')}{(1+zA_0z'\overline{z_0A_0z_0'}-z\bar{z}_0')(1+z_0A_0z_0'\overline{\xi A_0\xi'}-z_0\bar{\xi}')}.$$

事实上，Γ^{IV} 中将 $z_0\in\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 变至原点的变换可写为

$$\left(\frac{1+wA_0w'}{2},\ \frac{1-wA_0w'}{2i},\ wP_0^{-1}\right)$$

$$=\rho_z\left(\frac{1+zA_0z'}{2},\ \frac{1-zA_0z'}{2i},\ zP_0^{-1}\right)\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix},\tag{4.3.6}$$

此处实方阵 $$M=\begin{pmatrix}A^{(2)} & C^{(2,N)}\\ B^{(N,2)} & D^{(N)}\end{pmatrix}$$

满足 $$M\begin{pmatrix}I^{(2)} & \\ & -I^{(N)}\end{pmatrix}M'=\begin{pmatrix}I^{(2)} & \\ & -I^{(N)}\end{pmatrix},\tag{4.3.7}$$

$$\rho_z=\left\{\left[\left(\frac{1+zA_0z'}{2},\ \frac{1-zA_0z'}{2i}\right)-zP_0^{-1}x_0'\right]A\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1},\tag{4.3.8}$$

$$x_0=\frac{-1}{1-|z_0A_0z_0'|^2}\begin{pmatrix}(\overline{z_0A_0z_0'}-1)z_0P_0^{-1}+(z_0A_0z_0'-1)\bar z_0\bar P_0^{-1}\\ i(z_0A_0z_0'+1)\bar z_0\bar P_0^{-1}-i(\overline{z_0A_0z_0'}+1)z_0P_0^{-1}\end{pmatrix}.$$

我们特别取

$$A=\frac{1}{\sqrt{1+|z_0A_0z_0'|^2-z_0\bar z_0'}}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{1+z_0A_0z_0'+\overline{z_0A_0z_0'}+|z_0A_0z_0'|^2}, & 0\\ \dfrac{i(z_0A_0z_0'-\overline{z_0A_0z_0'})}{\sqrt{1+z_0A_0z_0'+\overline{z_0A_0z_0'}+|z_0A_0z_0'|^2}}, & \dfrac{1-|z_0A_0z_0'|^2}{\sqrt{1+z_0A_0z_0'+\overline{z_0A_0z_0'}+|z_0A_0z_0'|^2}}\end{pmatrix},\tag{4.3.9}$$

它满足 $AA'=(I-x_0x_0')^{-1}$. 于是由(4.3.6), (4.3.7)立知

$$1+wA_0w'\,\overline{\zeta A_0\zeta'}-w\bar\zeta'$$

$$=2\left(\frac{1+wA_0w'}{2},\ \frac{1-wA_0w'}{2i},\ wP_0^{-1}\right)\begin{pmatrix}I^{(2)} & \\ & -I^{(N)}\end{pmatrix}$$

$$\times\overline{\left(\frac{1+\zeta A_0\zeta'}{2},\ \frac{1-\zeta A_0\zeta'}{2i},\ \zeta P_0^{-1}\right)'}$$

$$=\rho_z\bar\rho_\xi(1+zA_0z'\,\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar\xi').\tag{4.3.10}$$

将(4.3.9)代入(4.3.8)中，可算出

$$\rho_z=\frac{\sqrt{1+|z_0A_0z_0'|^2-z_0\bar{z}_0'}}{1+zA_0z'\overline{z_0A_0z_0'}-z\bar{z}_0'}\sqrt{\frac{1+\overline{z_0A_0z_0'}}{1+z_0A_0z_0'}}.$$

相应地，有

$$\rho_\xi=\frac{\sqrt{1+|z_0A_0z_0'|^2-z_0\bar{z}_0'}}{1+\xi A_0\xi'\overline{z_0A_0z_0'}-\xi\bar{z}_0'}\sqrt{\frac{1+\overline{z_0A_0z_0'}}{1+z_0A_0z_0'}}.$$

代入(4.3.10)，即得需要证明的.

附带指出，在所取的变换之下，由于

$$\dot{\zeta}=(1+|z_0A_0z_0'|^2-z_0\bar{z}')^{\frac{N}{2}}|1+\xi A_0\xi'\overline{z_0A_0z_0'}-\xi\bar{z}_0'|^{-N}\dot{\xi}$$

$$(\zeta,\ \xi\in\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}),$$

再利用已证的等式，即得

$$(1+wA_0w'\overline{\zeta A_0\zeta'}-w\bar{\zeta}')^{-\frac{N}{2}}\dot{\zeta}=(1+zA_0z'\overline{z_0A_0z_0'}-z\bar{z}_0')^{\frac{N}{2}}$$

$$\times(1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}}(1+\xi A_0\xi'\overline{z_0A z_0'}-\xi\bar{z}_0')^{-\frac{N}{2}}\dot{\xi}.$$

十分容易将定理 4.3.1 推广成

定理 4.3.2　若 $\varphi(\xi)$ 在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上属于 Lip $p(0<p\leqslant1)$，则当 $\eta_0=e^{i\theta_0}(t,1,0,\cdots,0)P_0^{-1}\Gamma P_0\in\mathscr{B}_{\mathrm{IV}}-\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 时，Cauchy 主值

$$\text{v. p.}\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}(\gamma)}H_{\mathrm{IV}}(\eta_0,\xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\ \alpha^2(\operatorname{Re}Q)^2+\beta^2(\operatorname{Im}Q)^2\geqslant\varepsilon^2}}H_{\mathrm{IV}}(\eta_0,\xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

是存在的，其中 $z_0=e^{i\theta_0}(t,0,\cdots,0)P_0^{-1}\Gamma P_0$，$\gamma=\alpha/\beta$，

$$Q=(1+\eta_0A_0\eta_0'\overline{\xi A_0\xi'}-\eta_0\bar{\xi}')(1-\bar{z}_0\xi'),\ \alpha\geqslant0,\ \beta\geqslant0.$$

特别地，当 $\eta_0=(0,1,0,\cdots,0)$ 时，有

$$\text{v. p.}\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}(\gamma)}(1-\bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}}\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\ \alpha^2(\operatorname{Re}(1-\xi_2))^2+\beta^2(\operatorname{Im}\xi_2)^2\geqslant\varepsilon^2}}(1-\bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}}\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

$$=\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}}(1-\bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\dot{\xi}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{N}{2}-1}\int_0^{\pi}\varphi(\xi^*)d\theta,$$

这里 $\xi^*=(e^{2i\theta}, 1, 0, \cdots, 0)$.

定理 4.3.3 若 $\varphi(\xi)$ 在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上属于 $\mathrm{Lip}\,p(0<p\leqslant 1)$，则当 $\eta_0=e^{i\theta_0}(t, 1, 0, \cdots, 0)P_0^{-1}\Gamma P_0\in\mathscr{B}_{\mathrm{IV}}-\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 时，Cauchy 主值

$$\text{v. p. }\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}(b)}}H_{\mathrm{IV}}(\eta_0, \xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})}\int_{D_b(\eta_0,\varepsilon)}H_{\mathrm{IV}}(\eta_0, \xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

是存在的，其中 $D_b(\eta_0, \varepsilon)$ 为 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 去掉

$$\{\xi\,|\,\xi\in\mathscr{L}_{\mathrm{IV}},\ \mathrm{Re}\,Q<\alpha\varepsilon,\ \mathrm{Im}\,Q<\beta\varepsilon\},$$

Q 由定理 4.3.2 中所定义，$z_0=e^{i\theta_0}(t, 0, \cdots, 0)P_0^{-1}\Gamma P_0$,

$$b=\frac{2^{\frac{N}{2}-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}}\cos^{n-2}t\,\frac{\sin(n-1)t}{\sin t}\,dt\right\},$$

$$\alpha\geqslant 0,\quad\beta\geqslant 0.$$

特别地，当 $\eta_0=(0, 1, 0, \cdots, 0)$ 时，有

$$\text{v. p. }V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}(b)}}(1-\bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}}\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}-D_b(\eta_0,\varepsilon)}(1-\bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}}\varphi(\xi)\dot{\xi}$$

$$=V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}}(1-\bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\dot{\xi}$$

$$+\frac{b}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\xi^*)d\theta,$$

这里 $\xi^*=(e^{2i\theta}, 1, 0, \cdots, 0)$，$D_b(\eta_0, \varepsilon)$ 为 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 去掉

$$\{\xi\,|\,\xi\in\mathscr{L}_{\mathrm{IV}},\ \mathrm{Re}(1-\xi_2)<\alpha\varepsilon,\ |\mathrm{Im}\,\xi_2|<\beta\varepsilon\}.$$

上述两条定理的证明与定理 4.3.1 相仿，只要充分利用引理 4.2.1 及引理 4.2.2 即可。

§4.4 Cauchy 型积分在 $\mathscr{B}_{\rm IV}-\mathscr{L}_{\rm IV}$ 上的极限值

定理 4.4.1 设 $\varphi(\xi)$ 在 $\mathscr{L}_{\rm IV}$ 上满足 Lip $p(0<p\leqslant 1)$, 并令

$$F(z)=V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}} H_{\rm IV}(z,\ \xi)\varphi(\xi)\dot{\xi},\quad z\in\mathscr{R}_{\rm IV},$$

则当 z 从 $\mathscr{R}_{\rm IV}$ 的内部趋于点 $\eta_0=e^{i\theta_0}(t,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)P_0^{-1}\Gamma P_0\in\mathscr{R}_{\rm IV}-\mathscr{L}_{\rm IV}$ 时, 只要

$$|1+\eta_0 A_0\eta_0'\overline{\xi A_0\xi'}-\eta_0\bar{\xi}'|\cdot|1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}'|^{-1}\leqslant M\ (\text{常数}),\tag{4.4.1}$$

则必有

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\eta_0}F(z)=&\text{v. p. }V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}} H_{\rm IV}(\eta_0,\ \xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}\\&+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(e^{i\theta_0}\left(e^{i\theta}\frac{1+te^{-i\theta}}{1+te^{i\theta}},\right.\right.\\&\left.\left.1,\ 0,\ \cdots,\ 0\right)P_0^{-1}\Gamma P_0\right)\frac{d\theta}{(1+te^{i\theta})^{N/2}},\end{aligned}\tag{4.4.2}$$

其中主值是按定理 4.3.1 中所定义的.

上述定理可以推广成

定理 4.4.2 条件如定理 4.4.1, 则 (4.4.2) 式可以换成

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\eta_0}F(z)=&\text{v. p. }V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}(\gamma)} H_{\rm IV}(\eta_0,\ \xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{N}{2}-1}\cdot\frac{1}{2\pi}\\&\times\int_0^{2\pi}\varphi\left(e^{i\theta_0}\left(e^{i\theta}\frac{1+te^{-i\theta}}{1+te^{i\theta}},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\right)P_0^{-1}\Gamma P_0\right)\\&\times\frac{d\theta}{(1+te^{i\theta})^{N/2}},\end{aligned}\tag{4.4.3}$$

其中主值是按定理 4.3.2 中所定义的.

定理 4.4.3 条件如定理 4.4.1, 则 (4.4.2) 式可以换成

$$\lim_{z\to\eta_0} F(z) = \text{v. p. } V(\mathscr{L}_{\text{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}(b)} H_{\text{IV}}(\eta_0, \xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}$$
$$+b\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(e^{i\theta_0}\left(e^{i\theta}\frac{1+te^{-i\theta}}{1+te^{i\theta}}, 1,\right.\right.$$
$$\left.\left.0, \cdots, 0\right)P_0^{-1}\Gamma P_0\right)\frac{d\theta}{(1+te^{i\theta})^{N/2}}, \tag{4.4.4}$$

其中主值是按定理 4.3.3 中所定义的.

在定理 4.4.2 中，特别取 $\beta=0$; 在定理 4.4.3 中，特别取 $\beta=\infty$，都得到

$$\lim_{z\to\eta_0} F(z) = \text{v. p. }\int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}(\infty)} H_{\text{IV}}(\eta_0, \xi)\varphi(\xi)\dot{\xi}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\operatorname{Re}(1+\eta_0 A_0\eta_0'\overline{\xi A_0\xi'}-\eta_0\bar{\xi}')(1-\bar{z}_0\xi')>\varepsilon} H_{\text{IV}}(\eta_0, \xi)\varphi(\xi)\dot{\xi},$$

也就是 Cauchy 型积分的极限可以用一种 Cauchy 主值来表示.

现在来证明定理 4.4.1.

证 (i) 先取 $\eta_0=(0, 1, 0, \cdots, 0)\in\mathscr{B}_{\text{IV}}-\mathscr{L}_{\text{IV}}$, 并令

$$\xi^*=(e^{2i\theta}, 1, 0, \cdots, 0)\in\mathscr{L}_{\text{IV}},$$

则

$$F(z)=V(\mathscr{L}_{\text{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}} H_{\text{IV}}(z, \xi)(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\dot{\xi}$$
$$+V(\mathscr{L}_{\text{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}} H_{\text{IV}}(z, \xi)\varphi(\xi^*)\dot{\xi}=F_1(z)+F_2(z).$$

我们首先证明:

$$\lim_{z\to\eta_0} F_1(z)=\frac{1}{V(\mathscr{L}_{\text{IV}})}\int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*)}{(1-\eta_0\bar{\xi}')^{\frac{N}{2}}}\dot{\xi}, \tag{4.4.5}$$

此处 z 所沿之途径，满足已设条件(4.4.1). 考察

$$\int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))H_{\text{IV}}(z, \xi)\dot{\xi}-\int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}}\frac{(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\dot{\xi}}{(1-\eta_0\bar{\xi}')^{\frac{N}{2}}}$$
$$=\left(\int_{\sigma_\delta}+\int_{\Sigma_\delta}\right)(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\cdot[(1-\eta_0\bar{\xi}')^{\frac{N}{2}}$$
$$-(1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}')^{\frac{N}{2}}]\cdot H_{\text{IV}}(z, \xi)(1-\eta_0\bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}}\dot{\xi}$$
$$=I_1+I_2.$$

其中 σ_δ: $\begin{cases}\xi\in\mathscr{L}_{IV},\\ |1-\eta_0\bar{\xi}'|\leqslant\delta,\end{cases}$ Σ_δ: $\begin{cases}\xi\in\mathscr{L}_{IV},\\ |1-\eta_0\bar{\xi}'|\geqslant\delta.\end{cases}$

有

$$\begin{aligned}|I_1|=&\Big|\int_{\sigma_\delta}(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))(\sqrt{1-\eta_0\bar{\xi}'}\\&-\sqrt{1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}'})\sum_{l=0}^{N-1}\sqrt{1-\eta_0\bar{\xi}'}^{\,N-1-l}\\&\cdot\sqrt{1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}'}^{\,l}H_{IV}(z,\xi)(1-\eta_0\bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}}\dot{\xi}\Big|\\ \leqslant&\sum_{k=1}^{N}\int_{\sigma_\delta}|\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*)|\cdot|\sqrt{1-\eta_0\bar{\xi}'}\\&-\sqrt{1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}'}\,|\\&\cdot|1-zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}'|^{\frac{-k}{2}}|1-\eta_0\bar{\xi}'|^{\frac{k-1-N}{2}}\dot{\xi}.\end{aligned}$$

因为 $\varphi(\xi)$ 满足 Lip p, 并且 z 所沿之途径满足

$$|1-\eta_0\bar{\xi}'|\cdot|1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}'|^{-1}\leqslant M,$$

所以, 由 § 4.2,

$$\begin{aligned}|I_1|\leqslant&K\int_{\sigma_\delta}|\sqrt{1-\eta_0\bar{\xi}'}-\sqrt{1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}'}\,|\\&\cdot|1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}'|^{\frac{-1}{2}}\cdot|1-\eta_0\bar{\xi}'|^{\frac{p-N}{2}}\dot{\xi}\\ \leqslant&K_1\int_{\sigma_\delta}|1-\eta_0\bar{\xi}'|^{\frac{p-N}{2}}\dot{\xi}\\ \leqslant&K_2\int_{\substack{yy'=1\\|1-y_1-iy_2|<\delta}}|1-y_1-iy_2|^{\frac{p-N}{2}}\dot{y}=O(\delta^{\frac{p}{2}}),\end{aligned}$$

这里 K, K_1, K_2 皆为常数.

任与 $\varepsilon>0$, 可取一 $\delta>0$, 使在 σ_δ 上的积分 I_1 满足 $|I_1|<\frac{\varepsilon}{2}$. 在 δ 取定之后, 由于

$$\int_{\Sigma_\delta}H_{IV}(z,\xi)(\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*))\dot{\xi}$$

作为 z 的函数, 在 $z=\eta_0$ 处连续, 所以当 z 充分接近 η_0 时, 必有 $|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因此, (4.4.5)成立.

再来证明 $F_2(z)$ 与 z 无关，而且有

$$F_2(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\xi^*)d\theta.$$

设 $z=e^{i\theta_0}(t,\ \rho,\ 0,\ \cdots,\ 0)P_0^{-1}\Gamma P_0\in\mathscr{R}_{\rm IV}$. 先令

$$z=e^{i\theta_0}\tilde{z}P_0^{-1}\Gamma P_0,$$

相应地，$\xi=e^{i\theta_0}\tilde{\xi}P_0^{-1}\Gamma P_0$, $\tilde{\xi}^*=e^{-i\theta_0}\xi^*P_0^{-1}\Gamma' P_0$. 记

$$\varphi(\xi^*)=\tilde{\varphi}(\tilde{\xi}^*),$$

于是有 $$F_2(z)=V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}}H_{\rm IV}(\tilde{z},\ \tilde{\xi})\tilde{\varphi}(\tilde{\xi}^*)\dot{\tilde{\xi}}.$$

再作变换 $w=\Phi(\tilde{z})$，使 $\tilde{z}_0=(t,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 变为原点，$\tilde{z}=(t,\ \rho,\ 0,\ \cdots,\ 0)$变为 $w=(0,\ \rho,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，相应地，$\zeta=\Phi(\tilde{\xi})$，$\tilde{\xi}^*$ 变为 ζ^*，$\zeta^*=\zeta^*(e^{2i\theta},\ t)$ 是 $e^{2i\theta}$ 及 t 的有理函数. 记 $\tilde{\varphi}(\tilde{\xi}^*)=\psi(\zeta^*)$，并注意到逆变换 $\tilde{z}=\Phi^{-1}(w)$ 将 $w_0=(-t,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 变为原点，使得

$$\begin{aligned}H_{\rm IV}(\tilde{z},\ \tilde{\xi})\dot{\tilde{\xi}}&=H_{\rm IV}(w,\ w_0)^{-1}H_{\rm IV}(w,\ \zeta)H_{\rm IV}(\zeta,\ w_0)\dot{\zeta}\\&=(1-w\bar{\zeta}')^{-\frac{N}{2}}(1-\zeta\bar{w}_0')^{-\frac{N}{2}}\dot{\zeta}=(1-\rho\bar{\zeta}_2)^{-\frac{N}{2}}(1+t\bar{\zeta}_1)^{-\frac{N}{2}}\dot{\zeta},\end{aligned}$$

这里用到 $wA_0w'=0$, $w_0A_0w_0'=0$, $w\bar{w}_0'=0$. 于是

$$F_2(z)=V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}}(1-\rho\bar{\zeta}_2)^{-\frac{N}{2}}(1+t\bar{\zeta}_1)^{-\frac{N}{2}}\psi(\zeta^*)\dot{\zeta}.$$

记 $\zeta=e^{i\theta}xP_0$, $0\leqslant\theta<\pi$, $xx'=1$, 令 $y_1+iy_2=e^{-i\theta}(x_1+ix_2)$, $y_3=x_3$, $\cdots$, $y_N=x_N$, 则

$$\begin{aligned}F_2(z)=2^{\frac{N}{2}}V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}}&(1-\rho(y_1+iy_2))^{-\frac{N}{2}}\\&\times(1+te^{2i\theta}(y_1+iy_2))^{-\frac{N}{2}}\psi(\zeta^*)d\theta\cdot\dot{y}.\end{aligned}$$

再令

$$y_1+iy_2=re^{i\varphi},\quad 0\leqslant\varphi<2\pi,\quad r=\sqrt{1-y_3^2-\cdots-y_N^2},$$

则有 $$\dot{y}=d\varphi\, dy_3\cdots dy_N,$$

以致

$$
\begin{aligned}
F_2(z) &= 2^{\frac{N}{2}} V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1} \int_0^{\pi} d\theta \int_{y_3^2+\cdots+y_N^2<1} dy_3\cdots dy_N \\
&\quad\times \int_0^{2\pi} (1-\rho r e^{i\varphi})^{-\frac{N}{2}} (1+t r e^{i\varphi}\cdot e^{2i\theta})^{-\frac{N}{2}} \psi(\zeta^*) d\varphi \\
&= \frac{2^{\frac{N}{2}}}{V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\Gamma(k+1)} t^k \\
&\quad\times \int_0^{\pi} \psi(\zeta^*) e^{2ik\theta} d\theta \int_{y_3^2+\cdots+y_N^2<1} r^k dy_3\cdots dy_N \\
&\quad\times \int_0^{2\pi} (1-\rho r e^{i\varphi})^{-\frac{N}{2}} e^{ik\varphi} d\varphi,
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} (1-\rho r e^{i\varphi})^{-\frac{N}{2}} e^{ik\varphi} d\varphi \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+l\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\Gamma(l+1)} \rho^l r^l \int_0^{2\pi} e^{i(k+l)\varphi} d\varphi \\
&= \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } k=0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } k>0 \text{ 时.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
F_2(z) &= 2^{\frac{N}{2}} V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1} \int_0^{\pi} \psi(\zeta^*) d\theta \cdot 2\pi \int_{y_3^2+\cdots+y_N^2<1} dy_3\cdots dy_N \\
&= \frac{2^{\frac{N}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\cdot 2\pi}{2^{\frac{N}{2}+1}\,\pi^{\frac{N}{2}+1}} \cdot \frac{\pi^{\frac{N}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_0^{\pi} \varphi(\zeta^*) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi^*) d\theta.
\end{aligned}
$$

根据定理 4.3.1, 有

$$
\begin{aligned}
&V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1} \int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}} (1-\eta_0 \bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}} (\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*)) \dot{\xi} \\
&\quad= \mathrm{v.\,p.}\, V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1} \int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}} (1-\eta_0\bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}} \varphi(\xi^*) \dot{\xi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi^*) d\theta,
\end{aligned}
$$

所以最后得到

$$\lim_{z\to\eta_0} F(z)=\text{v. p. } V(\mathscr{L}_{\text{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}}(1-\eta_0\bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}}\varphi(\xi)\dot{\xi}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\xi^*)d\theta.$$

于是当 $\eta_0=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$时，定理得证.

(ii) 考虑 $\mathscr{B}_{\text{IV}}-\mathscr{L}_{\text{IV}}$ 上任一点

$$\eta_0=e^{i\theta_0}(t,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)P_0^{-1}\Gamma P_0,$$

因可利用 Γ_0^{IV} 中的变换 $z=e^{i\theta_0}\tilde{z}P_0^{-1}\Gamma P_0$, 故不妨设

$$\eta_0=(t,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0).$$

作 Γ^{IV} 中的变换 $w=\Phi(z)$, 使 $z_0=(t,\ 0,\ \cdots,\ 0)$变为原点，使 η_0 变为 $\zeta_0=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$. 于是

$$F(z)=V(\mathscr{L}_{\text{IV}})^{-1}H_{\text{IV}}(z,\ \xi)\int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}}H_{\text{IV}}(w,\ \zeta)\psi(\zeta)\dot{\zeta},$$

其中

$$\psi(\zeta)=\varphi(\Phi^{-1}(\zeta))\cdot(1+\Phi^{-1}(\zeta)A_0\Phi^{-1}(\zeta)'\overline{z_0A_0z_0'}-\Phi^{-1}(\zeta)\bar{z}_0')^{\frac{N}{2}},$$

它显然在 $\mathscr{L}_{\text{IV}}$ 上属于 Lip$p$.

注意到

$$\frac{|1-\zeta_0\bar{\zeta}'|}{|1+wA_0w'\overline{\zeta A_0\zeta'}-w\bar{\zeta}'|}$$
$$=\frac{|1+zA_0z'\overline{z_0A_0z_0'}-z\bar{z}_0'|\cdot|1+\eta_0A_0\eta_0'\overline{\xi A_0\xi'}-\eta_0\bar{\xi}'|}{(1+|z_0A_0z_0'|^2-z_0\bar{z}_0')\cdot|1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}'|},$$

其中 $|1+zA_0z'\overline{z_0A_0z_0'}-z\bar{z}_0'|$ 显然有界，而 $1+|z_0A_0z_0'|^2-z_0\bar{z}_0'$ 为一正数，所以根据已设可知，在 w 趋于 ζ_0 时，恒有

$$|1-\zeta_0\bar{\zeta}'|\cdot|1+wA_0w'\overline{\zeta A_0\zeta'}-w\bar{\zeta}'|^{-1}\leqslant M_1\quad(\text{常数}),$$

因此可利用(i)的结果，得到

$$\lim_{z\to\eta_0}F(z)=(1+\eta_0A_0\eta_0'\overline{z_0A_0z_0'}-\eta_0\bar{z}_0')^{-\frac{N}{2}}$$
$$\cdot\left\{\text{v. p. } V(\mathscr{L}_{\text{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}}(1-\zeta_0\bar{\zeta}')^{-\frac{N}{2}}\psi(\zeta)\dot{\zeta}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(\zeta^*)d\theta\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1}\int_{\substack{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}\\ |1-\zeta_0\bar{\zeta}'|>\varepsilon}}\varphi(\Phi^{-1}(\zeta))\cdot((1-\Phi^{-1}(\zeta)\bar{z}_0')^{\frac{N}{2}}$$

$$\times(1-\eta_0\bar{z}_0')^{-\frac{N}{2}}\cdot(1-\zeta_0\bar{\zeta}')^{-\frac{N}{2}}\dot{\zeta}+\frac{1}{2\pi}$$

$$\times\int_0^{\pi}\varphi(\Phi^{-1}(\zeta^*))\cdot(1-\Phi^{-1}(\zeta^*)\bar{z}')^{\frac{N}{2}}(1-\eta_0\bar{z}_0')^{-\frac{N}{2}}d\theta,$$

此处 $\zeta^*=(e^{2i\theta},1,0,\cdots,0)$，再利用变换 $\xi=\Phi^{-1}(\zeta)$，并注意到

$$\Phi^{-1}(\zeta^*)=\left(\frac{t+e^{2i\theta}}{1+te^{2i\theta}},1,0,\cdots,0\right),$$

$$1-\Phi^{-1}(\zeta^*)\bar{z}_0'=\frac{1-t^2}{1+te^{2i\theta}}\quad 和\quad 1-\eta_0\bar{z}_0'=1-t^2,$$

再以 θ 代 2θ，便可得出要证的公式.

在定理 4.4.1 的证明中，以定理 4.3.2 及定理 4.3.3 来替代定理 4.3.1，就可以证明定理 4.4.2 及定理 4.4.3.

定理 4.4.1，4.4.2 及 4.4.3 中的条件(4.4.1)是有可能放宽的.

§ 4.5 B 调和函数的边界值

设 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 在 $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 内解析，在 $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}+\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上连续，且 $u(\xi)$ 在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上属于 $\mathrm{Lip}\,p(0<p\leqslant 1)$，我们可以利用 § 4.4 中的结果，导出 $v(z)$ 在 $\mathscr{B}_{\mathrm{IV}}-\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$ 上的值与 $u(\xi)$ 间的一些有趣的关系式.

由定理 0.2.2，我们有 $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 上的解析函数的 Schwarz 公式

$$f(z)=V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}}u(\xi)s(z,\xi)\dot{\xi}+iv(0),$$

其中 Schwarz 核 $s(z,\xi)=2(1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-2z\bar{\xi}')^{-1}-1$. 于是

$$f(z)=2V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}}H_{\mathrm{IV}}(z,\xi)u(\xi)\dot{\xi}$$

$$-V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}}u(\xi)\dot{\xi}+iv(0).$$

在上式中取 $z=e^{i\theta_0}(t,\ \rho,\ 0,\ \cdots,\ 0)P_0^{-1}\Gamma P_0\in\mathscr{R}_{\rm IV}$，使之趋于 $\mathscr{B}_{\rm IV}-\mathscr{L}_{\rm IV}$ 的点 $\eta=e^{i\theta_0}(t,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)P_0^{-1}\Gamma P_0$（易知此一路径是满足(4.4.1)的）．根据定理 4.4.1，便有

$$f(\eta)={\rm v.\ p.}\ 2V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}}H_{\rm IV}(\eta,\ \xi)u(\xi)\dot{\xi}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(e^{i\theta_0}\left(e^{i\theta}\frac{1+te^{-i\theta}}{1+te^{i\theta}},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\right)P_0^{-1}\Gamma P_0\right)$$

$$\times(1+te^{i\theta})^{-\frac{N}{2}}d\theta-V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}}u(\xi)\dot{\xi}+iv(0).$$

在上式两端取虚部，得到

$$v(\eta)={\rm v.\ p.}\ V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}}u(\xi)\frac{H_{\rm IV}(\eta,\ \xi)-H_{\rm IV}(\xi,\ \eta)}{i}\dot{\xi}$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(e^{i\theta_0}\left(e^{i\theta}\frac{1+te^{-i\theta}}{1+te^{i\theta}},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\right)P_0^{-1}\Gamma P_0\right)$$

$$\times\frac{T(t,\ \theta)-T(t,\ -\theta)}{i}d\theta+v(0),\tag{4.5.1}$$

其中 $T(t,\ \theta)=(1+te^{i\theta})^{-\frac{N}{2}}$．

如果以定理 4.4.2 及定理 4.4.3 代替定理 4.4.1，则(4.5.1)可替代成

$$v(\eta)={\rm v.\ p.}\ V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}(\gamma)}u(\xi)\frac{H_{\rm IV}(\eta,\ \xi)-H_{\rm IV}(\xi,\ \eta)}{i}\dot{\xi}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{N}{2}-1}\cdot\frac{1}{2\pi}$$

$$\times\int_0^{2\pi}u\left(e^{i\theta_0}\left(e^{i\theta}\frac{1+te^{-i\theta}}{1+te^{i\theta}},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\right)P_0^{-1}\Gamma P_0\right)$$

$$\times\frac{T(t,\ \theta)-T(t,\ -\theta)}{i}d\theta+v(0),\tag{4.5.2}$$

以及

$$v(\eta)={\rm v.\ p.}V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}(b)}u(\xi)\frac{H_{\rm IV}(\eta,\ \xi)-H_{\rm IV}(\xi,\ \eta)}{i}\dot{\xi}$$

$$+b\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(e^{i\theta_0}\left(e^{i\theta}\frac{1+te^{-i\theta}}{1+te^{i\theta}},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\right)P_0^{-1}\Gamma P_0\right)$$

$$\times\frac{T(t,\ \theta)-T(t,\ -\theta)}{i}d\theta+v(0), \qquad (4.5.3)$$

这里

$$b=\frac{2^{n-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}}\cos^{n-2}t\ \frac{\sin(n-1)t}{\sin t}dt\right\}.$$

(4.5.1) 中的 Cauchy 主值由定理 4.3.1 中所定义，(4.5.2) 中的 Cauchy 主值由定理 4.3.2 中所定义，(4.5.3) 中的 Cauchy 主值由定理 4.3.3 中所定义.

在(4.5.2)中，特别取 $\beta=0$; 在(4.5.3)中特别取 $\beta=\infty$，都可得到

$$v(\eta)=\text{v. p. } V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}$$

$$\times\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}(\infty)}u(\xi)\frac{H_{\rm IV}(\eta,\ \xi)-H_{\rm IV}(\xi,\ \eta)}{i}\dot{\xi}+v(0), \qquad (4.5.4)$$

这里 $\text{v. p. } V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}(\infty)}$

定义为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathrm{Re}((1+\eta_0\Delta_0\eta_0'\xi\overline{\Delta_1\xi'}-\eta_0\bar{\xi}')(1-\eta_0\bar{\xi}'))>\varepsilon}.$$

(4.5.4) 告诉我们：在 $\mathscr{R}_{\rm IV}+\mathscr{L}_{\rm IV}$ 上连续，在 $\mathscr{R}_{\rm IV}$ 内解析的函数 $f=u+iv$，若 $u(z)$ 在 $\mathscr{L}_{\rm IV}$ 上属于 Lip$p$，则 v 可以用 u 的一种 Cauchy 型积分的主值表示之.

§ 4.6　Cauchy 型积分在 $\mathscr{L}_{\rm IV}$ 上的极限值

首先证明两个引理

引理 4.6.1　设 ζ, z 为二复数，并且

$$(1-\zeta z)\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)\neq 0,$$

则有

$$\frac{1}{(1-\zeta z)^n\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^n}$$

$$=(\alpha\beta)^n\sum_{\mu=1}^{n}C_{n-1}^{2n-\mu-1}\left(\frac{1}{\alpha^\mu(1-\zeta z)^\mu}+\frac{1}{\beta^\mu\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^\mu}\right), \tag{4.6.1}$$

其中 n 为任一整数, α、β 为

$$\alpha=\frac{1}{1-\zeta^2},\quad \beta=\frac{\zeta^2}{\zeta^2-1}. \tag{4.6.2}$$

证 利用归纳法,首先可证

$$\frac{1}{(1-\zeta z)^n\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)}=\sum_{v=1}^{n}\frac{\alpha^{n-v}\beta}{(1-\zeta z)^v}+\frac{\alpha^n}{1-\frac{1}{\zeta}z} \tag{4.6.3}$$

和

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^n(1-\zeta z)}=\sum_{v=1}^{n}\frac{\beta^{n-v}\alpha}{\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^v}+\frac{\beta^n}{1-\zeta z}. \tag{4.6.4}$$

事实上,当 $n=1$ 时,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)(1-\zeta z)}=\frac{\alpha}{1-\frac{1}{\zeta}z}+\frac{\beta}{1-\zeta z} \tag{4.6.5}$$

显然成立. 假定对于某一自然数 n, (4.6.3) 成立, 则因

$$\frac{1}{(1-\zeta z)^{n+1}\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)}=\frac{1}{1-\zeta z}\left(\sum_{v=1}^{n}\frac{\alpha^{n-v}\beta}{(1-\zeta z)^v}+\frac{\alpha^n}{1-\frac{1}{\zeta}z}\right)$$

$$=\sum_{v=2}^{n+1}\frac{\alpha^{n+1-v}\beta}{(1-\zeta z)^v}+\frac{\alpha^{n+1}}{1-\frac{1}{\zeta}z}+\frac{\alpha^n\beta}{1-\zeta z}$$

$$=\sum_{v=1}^{n+1}\frac{\alpha^{n+1-v}\beta}{(1-\zeta z)^v}+\frac{\alpha^{n+1}}{1-\frac{1}{\zeta}z},$$

所以 (4.6.3) 式对于任一自然数 n 皆成立. 同理可证 (4.6.4).

用归纳法证明 (4.6.1) 如下：当 $n=1$ 时，(4.6.1) 即为 (4.6.5)．假设对于某一自然数 n，(4.6.1)成立，便有

$$
\frac{1}{(1-\zeta z)^{n+1}\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^{n+1}}
$$

$$
=(\alpha\beta)^{n}\sum_{\mu=1}^{n}C_{n-1}^{2n-\mu-1}\left(\frac{\beta}{\alpha^{\mu}(1-\zeta z)^{\mu+1}}+\frac{\alpha}{\beta^{\mu}\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^{\mu+1}}\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{\alpha^{\mu-1}(1-\zeta z)^{\mu}\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)}+\frac{1}{\beta^{\mu-1}\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^{\mu}(1-\zeta z)}\right)
$$

$$
=(\alpha\beta)^{n+1}\sum_{\mu=1}^{n}C_{n-1}^{2n-\mu-1}\left[\frac{1}{\alpha^{\mu+1}(1-\zeta z)^{\mu+1}}+\frac{1}{\beta^{\mu+1}\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^{\mu+1}}\right.
$$

$$
+\frac{1}{\alpha^{\mu}\beta}\left(\sum_{v=1}^{n}\frac{\alpha^{\mu-v}\beta}{(1-\zeta z)^{v}}+\frac{\alpha^{\mu}}{1-\frac{1}{\zeta}z}\right)
$$

$$
\left.+\frac{1}{\alpha\beta^{\mu}}\left(\sum_{v=1}^{\mu}\frac{\beta^{\mu-v}\alpha}{\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^{v}}+\frac{\beta^{\mu}}{1-\zeta z}\right)\right]
$$

$$
=(\alpha\beta)^{n+1}\left(\sum_{\mu=2}^{n+1}\sum_{v=1}^{\mu}C_{n-1}^{2n-\mu}\frac{1}{\alpha^{v}(1-\zeta z)^{v}}+\sum_{\mu=1}^{n}C_{n-1}^{2n-\mu-1}\frac{1}{\alpha(1-\zeta z)}\right.
$$

$$
+\sum_{\mu=2}^{n+1}\sum_{v=1}^{\mu}C_{n-1}^{2n-\mu}\frac{1}{\beta^{v}\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^{v}}
$$

$$
\left.+\sum_{\mu=1}^{n}C_{n-1}^{2n-\mu-1}\frac{1}{\beta\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)}\right)
$$

$$
=(\alpha\beta)^{n+1}\left[\sum_{v=1}^{n+1}\sum_{\mu=v}^{n+1}C_{n-1}^{2n-\mu}\frac{1}{\alpha^{v}(1-\zeta z)^{v}}+\left(C_{n}^{2n-1}-C_{n-1}^{2n-1}\right)\frac{1}{\alpha(1-\zeta z)}\right.
$$

$$
\left.+\sum_{v=1}^{n+1}\sum_{\mu=v}^{n+1}C_{n-1}^{2n-\mu}\frac{1}{\beta^{v}\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^{v}}+\left(C_{n}^{2n-1}-C_{n-1}^{2n-1}\right)\frac{1}{\beta\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)}\right]
$$

$$=(\alpha\beta)^{n+1}\sum_{v=1}^{n+1}C_n^{2n+1-v}\left(\frac{1}{\alpha^v(1-\bar{\zeta}z)^v}+\frac{1}{\beta^v\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^v}\right),$$

此处用到 $C_r^r+C_r^{r+1}+\cdots+C_r^{n-1}=C_{r+1}^n$.

于是(4.6.1)对所有的自然数 n 皆成立. 引理得证.

特别地, 若 $|\zeta|=1$, 则

$$\alpha=\frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\zeta},\quad \beta=\frac{\zeta}{\zeta-\bar{\zeta}},$$

应用公式(4.6.1)可得

$$\frac{1}{(1-\bar{\zeta}z)^n(1-\zeta z)^n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^kC_{n-1}^{n+k-1}}{(\zeta-\bar{\zeta})^{n+k}(z-\zeta)^{n-k}}+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_{n-1}^{n+k-1}}{(\zeta-\bar{\zeta})^{n+k}(z-\bar{\zeta})^{n-k}}.\tag{4.6.6}$$

当 $N=2$ 时, $\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 即为双圆柱: $|z_1|<1$, $|z_2|<1$. 设 $\varphi(\xi)$ 在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}(z)$ 上连续, 作 Cauchy 型积分

$$F(z_1,\ z_2)=V(\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}(2))^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}(2)}(1+zA_0z'\overline{\xi A_0\xi'}-z\bar{\xi}')^{-1}\varphi(\xi)\dot{\xi},\tag{4.6.7}$$

其中

$$\xi=e^{i\theta}(x_1+ix_2,\ x_1-ix_2),\ x_1^2+x_2^2=1,\ x_2\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta<\pi.$$

记 $x_1+ix_2=e^{i\varphi}$, 并取 $z_1=z_2=\rho$, $(0<\rho<1)$, 代入(4.6.7), 便有

$$F(\rho,\ \rho)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i(\theta+\varphi)},\ e^{i(\theta-\varphi)})\,d\theta}{(1-\rho e^{-i(\theta+\varphi)})(1-\rho e^{-i(\theta-\varphi)})}.\tag{4.6.8}$$

作变换 $\theta+\varphi=\theta_1$, $\theta-\varphi=\theta_2$, (4.6.8)式即为

$$F(\rho,\ \rho)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_2}{1-\rho e^{-i\theta_2}}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta_1},\ e^{i\theta_2})}{1-\rho e^{-i\theta_1}}\,d\theta_1.$$

根据双圆柱的 Cauchy 型积分的熟知的结果(Какичев[1]), 有

引理 4.6.2 设 $\varphi(\xi)$ 在 $\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}(2)$ 上满足 Lipschitz 条件, 则

Cauchy 型积分(4.6.8)的极限值

$$\lim_{\rho\to 1-0} F(\rho,\ \rho)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_2}{1-e^{-i\theta_2}}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta_1},\ e^{i\theta_2})}{1-e^{-i\theta_1}}\,d\theta_1$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta_1},\ 1)}{1-e^{-i\theta_1}}\,d\theta_1$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(1,\ e^{i\theta_2})}{1-e^{-i\theta_2}}\,d\theta_2+\frac{1}{4}\varphi(1,\ 1).$$

本节主要结果是下述两条定理.

定理 4.6.1　$N=2n\ (n\geqslant 1)$ 时，在 $\mathscr{L}_{\rm IV}(N)$ 上任与一函数 $\varphi(\xi)$，如果 $\varphi(\xi)=\varphi(e^{i\theta}xP_0)=\varphi_0(e^{i\theta})$ 作为 $e^{i\theta}$ 的函数具有 $n-1$ 阶连续微商，并且它对 $e^{i\theta}$ 的 k 阶微商$(0\leqslant k\leqslant n-1)$在 $\mathscr{L}_{\rm IV}$ 上属于 Lip $p\ (0<p\leqslant 1)$，则当 $z=\rho\xi_0$ 从 $\mathscr{R}_{\rm IV}(N)$ 的内部或从 $\mathscr{R}^*_{\rm IV}(N)$ 的内部趋于 $\mathscr{L}_{\rm IV}$ 上的点 ξ_0 时，Cauchy 型积分

$$F(z)=V(\mathscr{L}_{\rm IV})^{-1}\int_{\mathscr{L}_{\rm IV}} H_{\rm IV}(z,\ \xi)\varphi(\xi)\dot{\xi} \qquad (4.6.9)$$

的极限值 $\lim\limits_{z\to\xi_0}F(z)$ 是存在的．特别当 $\xi_0=(1,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 时，$\lim\limits_{\rho\to 1-0}F(\rho,\ \rho,\ 0,\cdots,\ 0)$ 和 $\lim\limits_{\rho\to 1+0}F(\rho,\ \rho,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 的表达式如(4.6.12)所示.

注　(1) $\varphi(\xi)$ 在 $\mathscr{L}_{\rm IV}$ 上属于 Lip p，指按 § 4.3 中的定义．记 $\xi=e^{i\theta}xP_0$，$\xi^*=e^{i\tau}yP_0$，由于

$$(\xi-\xi^*)\overline{(\xi-\xi^*)}'=2((x-y)(x-y)'+2\mathrm{Re}(1-e^{i(\theta-\tau)})xy')$$
$$\leqslant 4((x-y)(x-y)'+|e^{i\theta}-e^{i\tau}|),$$

以及当 $a,\ b\geqslant 0,\ 0<\alpha\leqslant 1$ 时，有

$$(a+b)^\alpha\leqslant a^\alpha+b^\alpha,$$

所以，若 $\varphi(\xi)$ 属于 Lip p，则必有

$$|\varphi(\xi)-\varphi(\xi^*)|=O(((x-y)(x-y)')^{\frac{p}{4}}+|e^{i\theta}-e^{i\tau}|^{\frac{p}{2}}).$$

(2) 所述 $\varphi_0(e^{i\theta})$ 对 $e^{i\theta}$ 可以微商，指存在

$$\varphi_0'(e^{i\theta_0})=\frac{d\varphi_0(e^{i\theta})}{de^{i\theta}}\bigg|_{\theta=\theta_0}=\lim_{\theta\to\theta_0}\frac{\varphi_0(e^{i\theta})-\varphi_0(e^{i\theta_0})}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}},$$

这与 $\varphi_0(e^{i\theta})=\psi(\theta)$ 作为 θ 的函数的可微性是一致的.

定理证明如下:

无妨考虑 $\xi_0=(1,1,0,\cdots,0)\in\mathscr{L}_{\mathrm{IV}}$, 以 $z=(\rho,\rho,0,\cdots,0)\in\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}$ 代入(4.6.9), 得到

$$
\begin{aligned}
F_\rho &= F((\rho,\rho,0,\cdots,0))\\
&=\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\ x_N\geqslant 0}}\dot{x}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta}xP_0)\,d\theta}{(\rho^2e^{-2i\theta}-2\rho x_1e^{-i\theta}+1)^{\frac{N}{2}}}\\
&=\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\ x_N\geqslant 0}}\dot{x}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta}xP_0)\,d\theta}{(1-\rho e^{-i(\theta+\varphi_1)})^{\frac{N}{2}}(1-\rho e^{-i(\theta-\varphi_1)})^{\frac{N}{2}}},
\end{aligned}
$$

其中

$$
e^{i\varphi_1}=x_1+i\sqrt{1-x_1^2}. \tag{4.6.10}
$$

应用公式(4.6.6),有

$$
\begin{aligned}
F_\rho=&\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^kC_{n-1}^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}}\cdot\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\ x_N\geqslant 0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\\
&\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi_0(e^{i\theta})\,d\theta}{(\rho e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{n-k}}\\
&+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-2}\frac{C_{n-1}^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}}\,\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\ x_N\geqslant 0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\\
&\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi_0(e^{i\theta})\,d\theta}{(\rho e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{n-k}}\\
&+\frac{(-1)^{n-1}C_{n-1}^{2(n-1)}}{(2i)^{2(n-1)}}\,\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\ x_N\geqslant 0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{2(n-1)}}\\
&\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta}xP_0)\,d\theta}{(1-\rho e^{-i(\theta+\varphi_1)})(1-\rho e^{-i(\theta-\varphi_1)})}=I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}
$$

注意到当 $0\leqslant k\leqslant n-2$ 时,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi_0(e^{i\theta})\,d\theta}{(\rho e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{n-k}}\\
&=\frac{(-1)^{n-k}}{e^{i(n-k)\varphi_1}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\Phi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n-k}},
\end{aligned}
$$

此处 $\zeta=e^{i\theta}$, $z=\rho e^{-i\varphi_1}$, $\Phi(\zeta)=\varphi_0(\zeta)\zeta^{n-k-1}$. 利用分部积分可得

$$\int_{|\zeta|=1}\frac{\Phi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n-k}}=\frac{1}{(n-k-1)!}\int_{|\zeta|=1}\frac{\Phi^{(n-k-1)}(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$$

其中

$$\Phi^{(n-k-1)}(\zeta)=\frac{d^{n-k-1}}{d\zeta^{n-k-1}}(\varphi_0(\zeta)\zeta^{n-k-1})$$

$$=\sum_{l=0}^{n-k-1}C_l^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!}{l!}\zeta^l\varphi_0^{(l)}(\zeta).$$

由于当 $0\leqslant k\leqslant n-2,\ 0\leqslant l\leqslant n-k-1$ 时,

$$J_\rho=\int_{\substack{xx'=1\\x_N\geqslant0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^l\varphi_0^{(l)}(\zeta)d\zeta}{\zeta-\rho e^{-i\varphi_1}}$$

$$=\int_{\substack{xx'=1\\x_N\geqslant0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\frac{1}{2\pi i}$$

$$\times\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^l\varphi_0^{(l)}(\zeta)-e^{-il\varphi_1}\varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1})}{\zeta-\rho e^{-i\varphi_1}}d\zeta$$

$$+e^{-il\varphi_1}\int_{\substack{xx'=1\\x_N\geqslant0}}\frac{\varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1})}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\dot{x}.$$

根据假设,上式第一项的内层积分为一通常积分,并且当 $0\leqslant\rho\leqslant1$ 时,它对 x 属于 Lip $\frac{p}{2}(0<p\leqslant1)$,而第二项积分是一个通常积分.因而

$$\lim_{\rho\to1-0}J_\rho=\int_{\substack{xx'=1\\x_N\geqslant0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\frac{1}{2\pi i}$$

$$\times\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^l\varphi_0^{(l)}(\zeta)-e^{-il\varphi_1}\varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1})}{\zeta-e^{-i\varphi_1}}d\zeta$$

$$+e^{-il\varphi_1}\int_{\substack{xx'=1\\x_N\geqslant0}}\frac{\varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1})\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}},$$

或写为

$$\lim_{\rho\to1-0}J_\rho=\int_{\substack{xx'=1\\x_N\geqslant0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}$$

$$\times\text{ v. p. }\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l+1)\theta}\varphi_0^{(l)}(e^{i\theta})d\theta}{e^{i\theta}-e^{-i\varphi_1}}$$

$$+\frac{1}{2}e^{-il\varphi_1}\int_{\substack{xx'=1\\x_N\geqslant0}}\frac{\varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1})\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}.$$

上式第一项的内层积分是取习知的 Cauchy 主值，根据假设可知，它在 $xx'=1$ 上必属于 $\mathrm{Lip}\,\frac{p}{2}$（参见 Мусхелишвили[1]74～75 页），因而第一项积分是有意义的．于是

$$\lim_{\rho\to1-0} I_1=(-1)^n\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-k-1}\frac{C_{n-1}^{n+k-1}C_l^{n-k-1}}{(2i)^{n+k}l!\,e^{i(n-k)\varphi_1}}$$
$$\times\left(\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\x_N>0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\right.$$
$$\times\mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l+1)\theta}\varphi_0^{(l)}(e^{i\theta})\,d\theta}{e^{i\theta}-e^{-i\varphi_1}}$$
$$\left.+\frac{1}{e^{il\varphi_1}\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\x_N>0}}\frac{\varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1})\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\right).$$

同理可得

$$\lim_{\rho\to1-0} I_2=\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-k-1}\frac{(-1)^kC_{n-1}^{n+k-1}C_l^{n-k-1}e^{i(n-k)\varphi_1}}{(2i)^{n+k}l!}$$
$$\times\left(\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\x_N>0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\right.$$
$$\times\mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l+1)\theta}\varphi_0^{(l)}(e^{i\theta})\,d\theta}{e^{i\theta}-e^{i\varphi_1}}$$
$$\left.+\frac{e^{il\varphi_1}}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\x_N>0}}\frac{\varphi_0^{(l)}(e^{i\varphi_1})\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\right).$$

令

$$I_3^*=\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\x_N>0}}\frac{\dot{x}}{(1-x_1^2)^{n-1}}\cdot\frac{1}{2\pi}$$
$$\times\int_0^{2\pi}\frac{\varphi_0(e^{i\theta})\,d\theta}{(1-\rho e^{-i(\theta+\varphi_1)})(1-\rho e^{-i(\theta-\varphi_1)})},$$

取球坐标 $x_1=\cos\varphi_1$，$x_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2$，…，$x_N=\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{N-1}$，$0\leqslant\varphi_1$，$\varphi_2$，…，$\varphi_{N-1}<\pi$．于是

$$I_3^*=\frac{2\pi}{\omega_{N-1}}\int_0^\pi\sin^{N-3}\varphi_2\,d\varphi_2\cdots\int_0^\pi\sin\varphi_{N-2}\,d\varphi_{N-2}\int_0^\pi d\varphi_{N-1}$$
$$\times\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi_1\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi_0(e^{i\theta})\,d\theta}{(1-\rho e^{-i(\theta+\varphi_1)})(1-\rho e^{-i(\theta-\varphi_1)})}.$$

作变换 $\theta+\varphi_1=\theta_1$, $\theta-\varphi_1=\theta_2$, 易知,经变换

$$\theta=\frac{\theta_1+\theta_2}{2},\quad x_1=\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2},\quad x_2=\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\varphi_2,\cdots,$$

$$x_N=\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-1}$$

后,函数

$$\varphi(e^{i\theta}xP_0)=\varphi\Big(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\Big(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+i\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\varphi_2\Big),$$
$$\cdots,\ \sqrt{2}\,e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-1}\Big)$$
$$=\varphi^*(\theta_1,\ \theta_2,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_{N-1}) \tag{4.6.11}$$

在 $\zeta_1=e^{i\theta_1}$, $\zeta_2=e^{i\theta_2}(0\leqslant\theta_1,\ \theta_2<2\pi)$ 上属于 $\text{Lip}\,\frac{p}{2}$. 这可如下看出:设

$$\tau=\frac{\tau_1+\tau_2}{2},\quad y_1=\cos\frac{\tau_1-\tau_2}{2},\quad y_2=\sin\frac{\tau_1-\tau_2}{2}\cos\varphi_2,\cdots,$$

$$y_N=\sin\frac{\tau_1-\tau_2}{2}\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-1},$$

则因 $\varphi(\xi)$ 属于 $\text{Lip}\,p$, 便有

$$|\varphi^*(\theta_1,\ \theta_2,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_{N-1})-\varphi^*(\tau_1,\ \tau_2,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_{N-1})|$$
$$=O(|\theta-\tau|^{\frac{p}{2}}+((x-y)(x-y)')^{\frac{p}{4}})$$
$$=O((|\theta_1-\tau_1|+|\theta_2-\tau_2|)^{\frac{p}{2}})$$
$$=O(|\theta_1-\tau_1|^{\frac{p}{2}}+|\theta_2-\tau_2|^{\frac{p}{2}}).$$

应用引理 4.6.2, 立得

$$\lim_{\rho\to1-0}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\varphi_1\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi_0(e^{i\theta})d\theta}{(1-\rho e^{-i(\theta+\varphi_1)})(1-\rho e^{-i(\theta-\varphi_1)})}$$
$$=\text{v. p.}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_2}{1-e^{-i\theta_2}}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(\theta_1,\ \theta_2,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_{N-1})d\theta_1}{1-e^{-i\theta_1}}$$
$$+\frac{1}{2}\,\text{v. p.}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(\theta_1,\ 0,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_{N-1})d\theta_1}{1-e^{-i\theta_1}}+\frac{1}{2}\,\text{v. p.}\frac{1}{2\pi}$$
$$\times\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(0,\ \theta_2,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_{N-1})d\theta}{1-e^{-i\theta_2}}+\frac{1}{4}\varphi^*(0,0,\varphi_2,\cdots,\varphi_{N-1}).$$

由于 $\varphi^*(0,\ 0,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_{N-1})=\varphi((1,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0))$，并且

$$\frac{(-1)^{n-1}C_{n-1}^{2(n-1)}}{(2i)^{2(n-1)}}\cdot\frac{2\pi}{\omega_{2n-1}}\int_0^\pi \sin^{2n-3}\varphi_2 d\varphi_2\cdots$$

$$\times\int_0^\pi \sin\varphi_{2n-2}d\varphi_{2n-2}\int_0^\pi d\varphi_{2n-1}=\frac{\Gamma(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{2(n-1)}\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)}=1,$$

所以

$$\lim_{\rho\to1-0} I_3=\frac{\Gamma(2n-1)}{2^{2(n-1)}\pi^{n-1}\Gamma(n)}\int_0^\pi \sin^{N-3}\varphi_2 d\varphi_2\cdots\int_0^\pi \sin\varphi_{N-2}d\varphi_{N-2}$$

$$\times\int_0^\pi\left\{\text{v. p. }\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_2}{1-e^{-i\theta_2}}\right.$$

$$\times\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(\theta_1,\ \theta_2,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_{N-1})d\theta_1}{1-e^{-i\theta_1}}$$

$$+\frac{1}{2}\text{ v. p. }\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(\theta_1,\ 0,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_{N-1})}{1-e^{-i\theta_1}}d\theta_1$$

$$\left.+\frac{1}{2}\text{ v. p. }\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(0,\ \theta_2,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_{N-1})}{1-e^{-i\theta_2}}d\theta_2\right\}d\varphi_{N-1}$$

$$+\frac{1}{4}\varphi((1,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)).$$

同样可考虑 $\rho\to1+0$ 时的极限值. 最后得到

$$\lim_{\rho\to1\mp0}F_\rho=\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-k-1}\frac{C_{n-1}^{n+k-1}C_l^{n-k-1}}{(2i)^{n+k}l!}\frac{2}{\omega_{N-1}}$$

$$\times\int_{\substack{xx'=1\\x_N\geqslant0}}\frac{1}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\left[(-1)^n e^{-i(n-k)\varphi_1}\right.$$

$$\times\text{v. p. }\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l+1)\theta}\varphi_0^{(l)}(e^{i\theta})d\theta}{e^{i\theta}-e^{-i\varphi_1}}$$

$$\left.+(-1)^k e^{i(n-k)\varphi_1}\text{v. p. }\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(l+1)\theta}\varphi_0^{(l)}(e^{i\theta})d\theta}{e^{i\theta}-e^{i\varphi_1}}\right]\dot{x}$$

$$\pm\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-k-1}\frac{C_{n-1}^{n+k-1}C_l^{n-k-1}}{(2i)^{n+k}l!}\frac{1}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\x_N\geqslant0}}\frac{1}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}$$

$$\times[(-1)^n e^{-i(n-k+l)\varphi_1}\varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1})+(-1)^k e^{i(n-k+l)\varphi_1}\varphi_0^{(l)}(e^{i\varphi_1})]\dot{x}$$

$$+\frac{(2n-3)!!}{(2\pi)^{n-1}}\int_0^\pi \sin^{N-3}\varphi_2 d\varphi_2\cdots\int_0^\pi \sin\varphi_{N-2}d\varphi_{N-2}$$

$$\times\int_0^{\pi}\left\{\text{v. p. }\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_2}{1-e^{-i\theta_2}}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(\theta_1,\theta_2,\varphi_2,\cdots,\varphi_{N-1})d\theta_1}{1-e^{-i\theta_1}}\right.$$

$$\pm\frac{1}{2}\text{v. p. }\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(\theta_1,0,\varphi_2,\cdots,\varphi_{N-1})d\theta_1}{1-e^{-i\theta_1}}$$

$$\left.\pm\frac{1}{2}\text{v. p. }\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(0,\theta_2,\varphi_2,\cdots,\varphi_{N-1})d\theta_2}{1-e^{-i\theta_2}}\right\}d\varphi_{N-1}$$

$$+\frac{1}{4}\varphi((1,1,0,\cdots,0)).\tag{4.6.12}$$

其中
$$\varphi_0^{(l)}(e^{i\alpha})=\left.\frac{d^l\varphi_0(e^{i\theta})}{d(e^{i\theta})^l}\right|_{\theta=\alpha},$$

$e^{i\varphi_1}$ 和 $\varphi^*(\theta_1,\theta_2,\varphi_2,\cdots,\varphi_{N-1})$ 分别如(4.6.10)和(4.6.11)所示.

定理 4.6.2　$N=2n+1(n\geqslant1)$时，在 $\mathscr{L}_{IV}(N)$ 上任与一函数 $\varphi(\xi)$，如果$\varphi(\xi)=\varphi(e^{i\theta}xP_0)=\varphi_0(e^{i\theta})$对 $e^{i\theta}$ 具有$n+1$阶连续微商，且

$$\varphi_0^{(k)}(e^{i\theta})=\frac{d^k\varphi_0(e^{i\theta})}{d(e^{i\theta})^k}\quad(0\leqslant k\leqslant n+1)$$

在 $\mathscr{L}_{IV}$ 上连续，则当 $z=\rho\xi_0$ 从 $\mathscr{R}_{IV}(N)$ 的内部或从 $\mathscr{R}^*_{IV}(N)$ 的内部趋于 $\mathscr{L}_{IV}$ 上的点 ξ_0 时，Cauchy 型积分(4.6.9)的极限值 $\lim\limits_{z\to\xi_0}F(z)$是存在的. 特别当 $\xi_0=(1,1,0,\cdots,0)$时，

$$\lim_{\rho\to1-0}F((\rho,\rho,0,\cdots,0))\quad 和\quad \lim_{\rho\to1+0}F((\rho,\rho,0,\cdots,0))$$

的表达式分别如(4.6.17)和(4.6.18)所示.

证　应用公式(4.6.6)，有

$$F_\rho=F((\rho,\rho,0,\cdots,0))=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^kC_{n-1}^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}}\cdot\frac{2}{\omega_{N-1}}$$

$$\times\int_{\substack{xx'=1\\x_N\geqslant0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi_0(e^{i\theta})d\theta}{(\rho e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac12}(\rho e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{\frac12}}$$

$$+(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_{n-1}^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}}\cdot\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\x_N\geqslant0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi_0(e^{i\theta})d\theta}{(\rho e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{\frac12}(\rho e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{n-k+\frac12}}=J_1+J_2$$

$$\tag{4.6.13}$$

据假设，可写

$$\varphi_0(e^{i\theta})=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{\varphi_0^{(j)}(e^{i\varphi_1})}{j!}(e^{i\theta}-e^{i\varphi_1})^j+\psi(e^{i\theta},e^{i\varphi_1}) \quad (4.6.14)$$

和

$$\varphi_0(e^{i\theta})=\sum_{j=0}^{n+1}\frac{\varphi_0^{(j)}(e^{-i\varphi_1})}{j!}(e^{i\theta}-e^{-i\varphi_1})^j+\psi(e^{i\theta},e^{-i\varphi_1}). \quad (4.6.15)$$

根据假设，$\psi(e^{i\theta},e^{i\varphi_1})$ 和 $\psi(e^{i\theta},e^{-i\varphi_1})$ 在 $\mathscr{L}_{\text{IV}}$ 上连续，并且易知

$$\psi(e^{i\theta},e^{i\varphi_1})=o(|e^{i\theta}-e^{i\varphi_1}|^{n+1}),$$
$$\psi(e^{i\theta},e^{-i\varphi_1})=o(|e^{i\theta}-e^{-i\varphi_1}|^{n+1}).$$

于是

$$\begin{aligned}J_{1,k}=&\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\x_N>0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\\&\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi_0(e^{i\theta})d\theta}{(\rho e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac12}(\rho e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{\frac12}}\\=&\sum_{j=0}^{n+1}\frac{1}{j!}\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\x_N>0}}\frac{\varphi_0^{(j)}(e^{-i\varphi_1})}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\dot{x}\\&\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(e^{i\theta}-e^{-i\varphi_1})^j d\theta}{(\rho e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac12}(\rho e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{\frac12}}\\&+\frac{2}{\omega_{N-1}}\int_{\substack{xx'=1\\x_N>0}}\frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}\\&\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(e^{i\theta},e^{-i\varphi_1})d\theta}{(\rho e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac12}(\rho e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{\frac12}}.\end{aligned} \quad (4.6.16)$$

由于当 $0\leqslant\rho<1$ 时，

$$0\leqslant j\leqslant n+1,\ 0\leqslant k\leqslant n-1,$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(e^{i\theta}-e^{-i\varphi_1})^j d\theta}{(\rho e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac12}(\rho e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{\frac12}}\\&=\frac{(-1)^{n-k+1}}{e^{i(n-k)\varphi_1}}\end{aligned}$$

$$\times \sum_{l=0}^{j} \sum_{\mu=0}^{l} \frac{(-1)^{j-l}\Gamma(j+1)\Gamma\left(n-k+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(l-\mu+\frac{1}{2}\right)}{\left[\begin{array}{c}\Gamma(l+1)\Gamma(j-l+1)\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\\ \times\Gamma(\mu+1)\Gamma(l-\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\end{array}\right]}$$

$$\times \rho^{j} e^{i(2l-2\mu-j)\varphi_1}.$$

代入(4.6.16), (4.6.13)中, 令 $\rho\to 1-0$, 立得

$$\lim_{\rho\to 1-0} J_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1}\Gamma(n+k)}{\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n)\Gamma(k+1)(2i)^{n+k}}$$

$$\times \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1\\ x_N>0}} \frac{\varphi_0^{(j)}(e^{-i\varphi_1})}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}$$

$$\times \sum_{l=0}^{j} \sum_{\mu=0}^{l} \frac{\left[\begin{array}{c}(-1)^{j-l}\Gamma\left(n-k+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(l-\mu+\frac{1}{2}\right)\\ \times e^{i(2l+k-2\mu-j-n)\varphi_1}\end{array}\right]}{\Gamma(l+1)\Gamma(j-l+1)\Gamma(\mu+1)\Gamma(l-\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \dot{x}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k}\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)(2i)^{n+k}} \frac{2}{\omega_{N-1}}$$

$$\times \int_{\substack{xx'=1\\ x_N>0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1})\,d\theta}{(e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}}(e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}}.$$

同理可得

$$\lim_{\rho\to 1-0} J_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}\Gamma(n+k)}{\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n)\Gamma(k+1)(2i)^{n+k}}$$

$$\times \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1\\ x_N>0}} \frac{\varphi_0^{(j)}(e^{i\varphi_1})}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \sum_{l=0}^{j} \sum_{\mu=0}^{l}$$

$$\times \frac{(-1)^{j-l}\Gamma\left(n-k+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(l-\mu+\frac{1}{2}\right)e^{-i(2l+k-2\mu-j-n)\varphi_1}}{\Gamma(l+1)\Gamma(j-l+1)\Gamma(\mu+1)\Gamma(l-\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \dot{x}$$

$$+(-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)(2i)^{n+k}} \frac{2}{\omega_{N-1}}$$

$$\times \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N \geqslant 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi_1})d\theta}{(e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}(e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}}}.$$

于是

$$\lim_{\rho\to 1-0} F_\rho = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{l=0}^{j} \sum_{\mu=0}^{l}$$

$$\times \frac{(-1)^{j-l} C_k^{n+k-1} C_j^l C_\mu^l \Gamma\left(n-k+\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(l-\mu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(2i)^{n+k}\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(j+1)\Gamma(l+1)}$$

$$\times \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N \geqslant 0}} \frac{\left[\begin{array}{l}(-1)^{n+1}\varphi_0^{(j)}(e^{-i\varphi_1})e^{i(2l+k-2\mu-j-n)\varphi_1} \\ \quad +(-1)^{k+1}\varphi_0^{(j)}(e^{i\varphi_1})e^{-i(2l+k-2\mu-j-n)\varphi_1}\end{array}\right]}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \dot{x}$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}} \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N \geqslant 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left\{\begin{array}{l}(-1)^k(e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{k-n}\psi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1}) \\ \quad +(-1)^n(e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{k-n}\psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi_1})\end{array}\right\}}{(e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}(e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}} d\theta. \tag{4.6.17}$$

由于当 $\rho>1$ 时及 $0\leqslant j\leqslant n+1$, $0\leqslant k\leqslant n-1$ 时,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\varphi_1})^j d\theta}{(\rho e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}}(\rho e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}}=0,$$

所以可用同样的方法得到

$$\lim_{\rho\to 1+0} F_\rho = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}} \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N \geqslant 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left[\begin{array}{l}(-1)^k(e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{k-n}\psi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1}) \\ \quad +(-1)^n(e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{k-n}\psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi_1})\end{array}\right]}{(e^{-i\theta}-e^{i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}(e^{-i\theta}-e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}} d\theta. \tag{4.6.18}$$

由(4.6.17)和(4.6.18)所表示的都是通常积分，其中 $\varphi_0^{(j)}(e^{i\alpha})=\left.\frac{d^j\varphi_0(e^{i\theta})}{d(e^{i\theta})^j}\right|_{\theta=\alpha}$, $e^{i\varphi_1}$ 和 $\psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi_1})$, $\psi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1})$ 分别如(4.6.10), (4.6.14), (4.6.15)所示。定理证毕。

第五章 矩阵双曲空间的 Cauchy 型积分

§5.1 引 言

在上一章中,我们讨论了 Lie 球双曲空间,即第四类典型域的 Cauchy 型积分,在这一章中,将讨论矩阵双曲空间,即第一类典型域的 Cauchy 型积分.

本章的材料取自龚昇[1],龚昇、孙继广[4],及龚昇、史济怀[4].

所谓第一类典型域 $\mathscr{R}_I(m, n)$,是指矩阵双曲空间,由满足

$$I-Z\bar{Z}'>0$$

的 m 行 n 列(不妨设 $m\leqslant n$)复元素矩阵 Z 所构成. 用 $\mathscr{L}_I^{(k)}$ 表示 $\overline{\mathscr{R}_I(m, n)}$ 上使 $I-Z\bar{Z}'$ 的秩为 k 的点所成的集合. 特别 $\mathscr{L}_I^{(0)}=\mathscr{L}_I(m, n)$ 为 $\mathscr{R}_I(m, n)$ 的特征流形.

此外,我们以 $\mathscr{R}_I^*(m, n)$ 表示空间

$$I-Z\bar{Z}'<0,$$

这里 Z 仍为 m 行 n 列复元素矩阵.

华罗庚[1]指出: 如果 $\varphi(U)$ 在 $\mathscr{R}_I(m, n)$ 的特征流形 $\mathscr{L}_I(m, n)$ 上连续,则 $\mathscr{R}_I(m, n)$ 的 Cauchy 型积分

$$F(Z)=\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m,\ n))}\int_{\mathscr{L}_I(m,\ n)}\varphi(U)\det(I-Z\overline{U}')^{-n}\dot{U},$$
$$Z\in\mathscr{R}_I(m,\ n) \tag{5.1.1}$$

和 $\mathscr{R}_I^*(n)=\mathscr{R}_I^*(n,\ n)$ 的 Cauchy 型积分

$$F(Z)=\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(n))}\int_{\mathscr{L}_I(n)}\varphi(U)\det(I-Z\overline{U}')^{-n}\dot{U},$$
$$Z\in\mathscr{R}_I^*(n) \tag{5.1.2}$$

是存在的，这里 $\mathscr{L}_I(n)=\mathscr{L}_I(n,\ n)$，$V(\mathscr{L}_I(m,\ n))$ 表示 $\mathscr{L}_I(m,\ n)$ 的体积．同时还指出：如果 $Z\bar{Z}'$ 的特征根并非都大于 1 或都小于 1，则常有酉方阵 U，使 $\det(I-Z\overline{U}')=0$．即相应的 Cauchy 核 $\det(I-Z\overline{U}')^{-n}$ 失去意义．容易看出，即使 $Z\bar{Z}'>I$，只要 $m<n$ 而 $n>2$，亦必有 $U^{(m,n)}\in\mathscr{L}_I(m,\ n)$，使 $\det(I-Z\overline{U}')=0$．事实上，Z 可分解为 $Z=U_0^{(m)}(\Lambda^{(m)},\ 0)V_0^{(n)}$，$U_0$，$V_0$ 皆为而方阵，$\Lambda=[\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m]>I$．我们取

$$U=U_0\begin{pmatrix} I^{(m-2)} & 0 & 0 & 0 & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & 0 & 0 & 0 & 0^{(m,n-m-1)} \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\frac{1}{\lambda_m^2}} & -\frac{1}{\lambda_m} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_m} & \sqrt{1-\frac{1}{\lambda_m^2}} & \end{pmatrix}V_0,$$

则立得

$$\det(I-Z\overline{U}')$$
$$=\det\left([1-\lambda_1,\ \cdots,\ 1-\lambda_{m-2}]\dotplus\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\lambda_m\sqrt{1-\frac{1}{\lambda_m^2}} & 0\end{pmatrix}\right)=0.$$

因而在 $\mathscr{R}_I^*(m,\ n)\ (m<n)$ 内，Cauchy 核 $\det(I-Z\overline{U}')^{-n}$ 亦无意义．所以要研究的只是 $\mathscr{R}_I(m,\ n)\ (m\leqslant n)$ 及 $\mathscr{R}_I^*(n)$ 的 Cauchy 型

积分(5.1.1)及(5.1.2).

在这一章中将证明：如果 $\varphi(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(n)$ 上具有 $N(n)\left(n\right.$ 为偶数时，$N(n)=\frac{n^2}{4}$；n 为奇数时，$\left.N(n)=\frac{n^2-1}{4}\right)$ 阶满足 Lipschitz 条件的偏微商，则 $\mathscr{R}_I(n)$ 和 $\mathscr{R}_I^*(n)$ 的 Cauchy 型积分(5.1.1)和(5.1.2)当 $Z=\rho V\,(0<\rho<1$ 或 $\rho>1)$ 趋于 $\mathscr{L}_I(n)$ 上的任一点 V 时的极限值是存在的，并且给出了当 $V=I^{(n)}$ 时的极限值的表达式(定理 5.2.1). 此外还证明了：如果 $\varphi(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(m, n)$ 上满足 Lipschitz 条件，则 Cauchy 型积分(5.1.1)当 Z 从 $\mathscr{R}_I(m, n)$ 的内部趋于 $\mathscr{L}_I^{(m-1)}$ 时的极限值是存在的，并且给出了极限值的一般表达式(定理 5.4.1). 由此可以推知：$\mathscr{R}_I(m, n)$ 上的任一 $\mathscr{B}$-调和函数在 $\mathscr{L}_I^{(m-1)}$ 上的值，必可用它的 $\mathscr{B}$-调和共轭函数在 $\mathscr{L}_I(m, n)$ 上的值通过积分表出(定理 5.5.1). 当然如前面的几章那样，这时极限值的表达形式是多种多样的. 当 $m=n$ 时，利用解析变换 $Z^{-1}=W\,(Z\bar{Z}'>I)$ 即可得到 $\mathscr{R}_I^*(n)$ 上的 Cauchy 型积分(5.1.2)的相应结果.

§5.2　Cauchy 型积分在 $\mathscr{L}_I(n)$ 上的极限值

关于 Cauchy 型积分

$$F(Z)=\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(n))}\int_{\mathscr{L}_I(n)}\varphi(U)\det(I-Z\bar{U}')^{-n}\dot{U}\qquad(5.2.1)$$

(其中 $Z\in\mathscr{R}_I(n)$ 或 $\mathscr{R}_I^*(n)$)在 $\mathscr{L}_I(n)$ 上的极限值，有下面的定理 5.2.1.

首先，我们指出多圆柱上的 Cauchy 型积分的一个结果. 设 $\varphi(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 是定义在 $|\zeta_1|=1, \cdots, |\zeta_n|=1$ 上的连续函数，如果对于任意两点 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 和 $(t_1, \cdots, t_n)$，$|\zeta_j|=1$，$|t_j|=1$，$j=1, 2, \cdots, n$，恒有

$$|\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n)-\varphi(t_1, \cdots, t_n)|\leqslant M\left(\sum_{j=1}^n|\xi_j-t_j|^2\right)^{\alpha/2},$$

其中 M 为一仅与 $\varphi(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 有关的常数，$0<\alpha\leqslant1$，则称 $\varphi(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$在 $|\zeta_1|=1, \cdots, |\zeta_n|=1$ 上满足 Lipschitz 条件. 我们有

引理 5.2.1 设 $\varphi(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$是定义在 $|\zeta_1|=1, \cdots, |\zeta_n|=1$ 上的对称函数,并且满足 Lipschitz 条件,则 Cauchy 型积分

$$\Phi_\rho=(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_n|=1}\varphi(\zeta_1, \cdots, \varphi_n)\cdot\prod_{k=1}^n(\zeta_k-\rho)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

(其中 $0<\rho<1$ 或 $\rho>1$)的极限值为

$$\lim_{\rho\to1-0}\Phi_\rho=\sum_{k=0}^n C_k^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\text{v. p.}(2\pi i)^{-k}\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_k|=1}\cdot\varphi(\zeta_1, \cdots, \zeta_k, 1, \cdots, 1)\prod_{l=1}^k(\zeta_l-1)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_k \tag{5.2.2}$$

和

$$\lim_{\rho\to1+0}\Phi_\rho=\sum_{k=0}^n C_k^n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\text{v. p.}(2\pi i)^{-k}\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_k|=1}\cdot\varphi(\zeta_1, \cdots, \zeta_k, 1, \cdots, 1)\prod_{l=1}^k(\zeta_l-1)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_k, \tag{5.2.3}$$

其中 v. p. 的意义为 Cauchy 主值,即

$$\text{v. p.}\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_k|=1}\psi(\zeta_1, \cdots, \zeta_k)\prod_{l=1}^k(\zeta_l-1)^{-1}d\zeta_1, \cdots, d\zeta_k$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\substack{|\zeta_1|=1\\|\theta_1|>\varepsilon}}\cdots\int_{\substack{|\zeta_k|=1\\|\theta_k|>\varepsilon}}\psi(\zeta_1, \cdots, \zeta_k)\prod_{l=1}^k(\zeta_l-1)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_k.$$

公式(5.2.2)和(5.2.3)可由 Какичев[1] 中结果导出.

设 $\varphi(U)$是在 $\mathscr{L}_I(n)$ 上的连续函数，如果对于 $\mathscr{L}_I(n)$ 上任两点 v, w，恒有

$$|\varphi(v)-\varphi(w)|\leqslant M[t_r(v-w)\overline{(v-w)}']^{\frac{\alpha}{2}},$$

其中 M 为一仅与 $\varphi(U)$ 有关的常数，$0<\alpha\leqslant 1$，则称 $\varphi(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(n)$ 上满足 Lipschitz 条件. 如果 $\varphi(U)$ 的所有 N 阶偏微商都在 $\mathscr{L}_I(n)$ 上满足 Lipschitz 条件，则记 $\varphi(U)\in\mathscr{L}(N, \alpha)$.

定理 5.2.1 设 $\mathscr{L}_I(n)$ 上任与一函数 $\varphi(U)$：n 为偶数时，设 $\varphi(U)\in\mathscr{L}\left(\frac{n^4}{4}, \alpha\right)$；$n$ 为奇数时，设 $\varphi(U)\in\mathscr{L}\left(\frac{n^2-1}{4}, \alpha\right)$，则当 $Z=\rho V$ 从 $\mathscr{R}_I(n)$ 的内部 $(0<\rho<1)$ 以及从 $\mathscr{R}^*(n)$ 的内部 $(\rho>1)$ 趋于 $\mathscr{L}_I(n)$ 上任一点 V 时，Cauchy 型积分(5.2.1)的极限值是存在的，并且有

$$
\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 1-0} F(\rho I)=&\sum_{l=1}^{n}\sum_{(\mu,l)} s!(n!)^{-1}C_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}\\
&\cdot\sum_{k=0}^{l} C_k^l\left(\frac{l}{2}\right)^{l-k}\text{v. p.}(2\pi i)^{-k}\\
&\cdot\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_k|=1} g_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_{n-l}}(\zeta_1,\cdots,\zeta_k,1,\cdots,1)\\
&\cdot\prod_{j=1}^{k}(\zeta_j-1)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_k
\end{aligned}\tag{5.2.4}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 1+0} F(\rho I)=&\sum_{l=1}^{n}\sum_{(\mu,l)} s!(n!)^{-1}C_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}\\
&\cdot\sum_{k=0}^{l} C_k^l\left(\frac{-1}{2}\right)^{l-k}\text{v. p.}(2\pi i)^{-k}\\
&\cdot\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_k|=1} g_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_{n-1}}(\zeta_1,\cdots,\zeta_k,1,\cdots,1)\\
&\cdot\prod_{j=1}^{k}(\zeta_j-1)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_k,
\end{aligned}\tag{5.2.5}
$$

其中

$$
(\mu, l)\text{表示}\begin{cases}\mu_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\mu_{n-l}\leqslant n-1\leqslant\mu_{n-l-1}\leqslant\cdots\leqslant\mu_0,\\ \mu_{n-1}+\cdots+\mu_0=n(n-1),\end{cases}
$$

及

$$
C_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sum_{l_{n-1}+k_{n-1}=\mu_{n-1},\cdots,l_0+k_0=\mu_0}\delta^{n-1,\cdots,1,0}_{l_{n-1},\cdots,l_1,l_0}\delta^{n-1,\cdots,1,0}_{k_{n-1},\cdots,k_1,k_0},
\tag{5.2.6}
$$

而 $(l_{n-1}, \cdots, l_1, l_0)$ 与 $(k_{n-1}, \cdots, k_1, k_0)$ 跑遍 $(n-1, \cdots, 1, 0)$ 的所有排列，s 是 $\mu_{n-1}, \cdots, \mu_0$ 中不同值的个数，而

$$g_{\mu_{n-1}, \cdots, \mu_{n-l}} = [(n-\mu_{n-1}-1)!\cdots(n-\mu_{n-l}-1)!]^{-1} \cdot \frac{\partial^{(n-1)!-\mu_{n-1}-\cdots-\mu_{n-l}} g^{[\mu]}(\zeta_1, \cdots, \zeta_l)}{\partial \zeta_1^{n-\mu_{n-1}} \cdots \partial \zeta_l^{n-\mu_{n-l}}}, \tag{5.2.7}$$

$$g^{[\mu]}(\zeta_1, \cdots, \zeta_l) = (2\pi i)^{l-n} \int_{|\zeta_{l+1}|=1} \cdots \int_{|\zeta_n|=1} f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \cdot p_{l+1}^{\mu_{n-l-1}-n} \cdots p_n^{\mu_0-n} d\zeta_{l+1} \cdots d\zeta_n, \tag{5.2.8}$$

此处 $p_j = \zeta_j - 1$, $\mu_{n-j} \geqslant n$, $j = l+1, \cdots, n$,

$$f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = \omega_n'^{-1} \int_{[V]} \varphi(V \Lambda \overline{V}') [\dot{V}], \tag{5.2.9}$$

其中 $\Lambda = [\zeta_1, \cdots, \zeta_n]$, $\omega_n' = (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} [1!2!\cdots(n-1)!]^{-1}$，积分 (5.2.9) 的意义参见华罗庚[1].

证　无妨取 $V = I$.

令 $F_\rho = F(\rho I)$，于是有(华罗庚[1])

$$F(\rho) = (2\pi)^{-n} \int\cdots\int_{2\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n \geqslant 0} f(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) \cdot \prod_{\mu<\nu} |e^{i\theta_\mu} - e^{i\theta_\nu}|^2 \prod_{l=1}^{n} (1-\rho e^{-i\theta_l})^{-n} d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

易知

$$f(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) = \omega_n'^{-1} \int_{[V]} \varphi(V \Lambda \overline{V}') [\dot{V}]$$

$$(\Lambda = [e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}])$$

是 $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$ 的对称函数(龚昇[3])，并且 $f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 在 $|\zeta_1| = 1, \cdots, |\zeta_n| = 1$ 上属于 $\mathscr{L}\left(\frac{n^2}{4}, \alpha\right)$ (当 n 为偶数时)，或 $\mathscr{L}\left(\frac{n^2-1}{4}, \alpha\right)$ (当 n 为奇数时).

令 $p_{k,\rho} = \zeta_k - \rho$, $\zeta_k = e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2, \cdots, n$，便得到

$$F_\rho = (n!)^{-1} (2\pi i)^{-n} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_n|=1} f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) p_{1,\rho}^{-n} \cdots p_{n,\rho}^{-n} \cdot \prod_{\mu \neq \nu} (p_{\mu,\rho} - p_{\nu,\rho}) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$$

$$=\sum_{\mu_{n+1}+\cdots+\mu_0=n(n-1)}(n!)^{-1}(2\pi i)^{-n}C_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_n|=1}$$

$$\cdot p_{1,\rho}^{-n}\cdots p_{n,\rho}^{-n}p_{1,\rho}^{\mu_{n-1}}\cdots p_{n,\rho}^{\mu_0}\cdot f(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_n)d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

$$=\sum_{(\mu)}(n!)^{-1}s!C_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_n|=1}$$

$$\cdot f(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_n)p_{1,\rho}^{-n+\mu_{n-1}}\cdots p_{n,\rho}^{-n+\mu_0}d\zeta_1,\ \cdots,\ d\zeta_n$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\sum_{(\mu,l)}(n!)^{-1}s!C_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}I^{[l]}_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}(\rho),\tag{5.2.10}$$

其中 $C_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}$ 为(5.2.6)所示，s 是 $\mu_{n-1},\ \cdots,\ \mu_0$ 中不同值的个数，(μ)表示

$$\begin{cases}\mu_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\mu_0,\\ \mu_{n+1}+\cdots+\mu_0=n(n-1),\end{cases}$$

而
$$I^{[l]}_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}(\rho)=(2\pi i)^{-n}\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_n|=1}$$

$$\cdot p_{1,\rho}^{\mu_{n-1}-n}\cdots p_{n,\rho}^{\mu_0-n}f(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_n)d\zeta_1\cdots d\zeta_n$$

$$=(2\pi i)^{-l}\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_l|=1}$$

$$\cdot g_\rho^{[\mu]}(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_l)p_{1,\rho}^{\mu_{n-1}-n}\cdots p_{l,\rho}^{\mu_{n-l}-n}d\zeta_1\cdots d\zeta_l,$$

此处

$$g_\rho^{[\mu]}(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_l)=(2\pi i)^{l-n}\int_{|\zeta_{l+1}|=1}\cdots\int_{|\zeta_n|=1}$$

$$\cdot f(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_n)p_{l+1,\rho}^{\mu_{n-1-l}-n}\cdots p_{n,\rho}^{\mu_0-n}d\zeta_{l+1}\cdots d\zeta_n.$$

连续分部积分可得

$$I^{[l]}_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}(\rho)=(2\pi i)^{-l}\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_l|=1}$$

$$\cdot g_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_{n-l},\rho}(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_l)(p_{1,\rho}\cdots p_{l,\rho})^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_l,$$

其中

$$g_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_{n-l},\rho}(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_l)=[(n-\mu_{n-1}-1)!\cdots(n-\mu_{n-l}-1)!]^{-1}$$

$$\cdot\frac{\partial^{(n-1)l-\mu_{n-1}-\cdots-\mu_{n-l}}g_\rho^{[\mu]}(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_l)}{\partial\zeta_1^{n-\mu_{n-1}-1}\cdots\partial\zeta_l^{n-\mu_{n-l}-1}}.$$

由引理 5.2.1 易知

$$\lim_{\rho\to1-0} I^{[l]}_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}(\rho)$$

$$=\sum_{k=1}^{l} C_k^l\left(\frac{1}{2}\right)^{l-k}\cdot\text{v. p. }(2\pi i)^{-k}\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_k|=1}$$

$$\cdot g_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_{n-1}}(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_k,\ 1,\ \cdots,\ 1)$$

$$\cdot\prod_{\nu=1}^{k}(\zeta_\nu-1)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_k,$$

$$\lim_{\rho\to1+0} I^{[l]}_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_0}(\rho)$$

$$=\sum_{k=0}^{l} C_k^l\left(-\frac{1}{2}\right)^{l-k}\cdot\text{v. p. }(2\pi i)^{-k}\int_{|\zeta_1|=1}\cdots\int_{|\zeta_k|=1}$$

$$\cdot g_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_{n-1}}(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_k,\ 1,\ \cdots,\ 1)$$

$$\cdot\prod_{\nu=1}^{k}(\zeta_\nu-1)^{-1}d\zeta_1\cdots d\zeta_k,$$

其中 $g_{\mu_{n-1},\cdots,\mu_{n-1}}$ 如(5.2.7)所示. 所以在(5.2.10)式中令 $\rho\to1-0$ 和 $1+0$, 便得公式(5.2.4)及(5.2.5).

必须指出, 在公式(5.2.4)和(5.2.5)中所出现的对 $f(\zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_n)$ 的偏微商不超过 $\frac{n^2}{4}$ 阶(当 n 为偶数时)或 $\frac{n^2-1}{4}$ 阶(当 n 为奇数时). 即在定理对 $\varphi(U)$ 所设的条件下, 公式(5.2.4)和(5.2.5)成立.

事实上, 只需注意到

$$\prod_{j\neq k}(p_{j,\rho}-p_{k,\rho})\prod_{l=1}^{n}p_{l,\rho}^{-n}=\prod_{j\neq k}(1-p_{k,\rho}p_{j,\rho}^{-1})\prod_{l=1}^{n}p_{l,\rho}^{-1}$$

$$=\prod_{l=1}^{n}p_{l,\rho}^{-1}\prod_{j<k}(2-p_{k,\rho}p_{j,\rho}^{-1}-p_{j,\rho}p_{k,\rho}^{-1}),$$

其最高次项有, 例如

$$\prod_{l=1}^{n}p_{l,\rho}^{-1}p_{1,\rho}^{1-n}p_{2,\rho}\cdots p_{n,\rho}\cdot p_{2,\rho}^{2-n}p_{3,\rho}\cdots p_{n,\rho}\cdots p_{n-1,\rho}^{-1}p_{n,\rho}$$

$$=\prod_{l=1}^{n}p_{l,\rho}^{-1}\{(p_{2,\rho}p_{3,\rho}^{2}\cdots p_{j-1,\rho}^{j-2}p_{j,\rho}^{j-1}\cdots p_{n-1,\rho}^{n-2}p_{n,\rho}^{n-1})$$

$$\cdot(p_{1,\rho}^{n-1}p_{2,\rho}^{n-2}\cdots p_{j-1,\rho}^{n-j+1}p_{j,\rho}^{n-j}\cdots p_{n-1,\rho})^{-1}\}.$$

若 $n=2m$ 或 $2m+1$，易知当且仅当 $j\geqslant m+1$ 时，上式 { } 中的 $p_{j,p}$ 的指数为正. 由此可知，相应于此项，必须要求 $f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 所具有的偏微商的阶数为

$$(n-1)+(n-3)+\cdots+[(n-m)-(m-1)]=(n-m)m$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4}, & \text{当 } n=2m \text{ 时,}\\[2ex] \dfrac{n^2-1}{4}, & \text{当 } n=2m+1 \text{ 时.}\end{cases}$$

定理证毕.

§5.3 一条引理

在 $\mathscr{L}_I(m, n)$ 上任与一函数 $\varphi(U)$，如果对于 $\mathscr{L}_I(m, n)$ 上的任意两点 U_0, V_0，恒有不等式

$$|\varphi(U_0)-\varphi(V_0)|\leqslant K(t_r(U_0-V_0)\overline{(U_0-V_0)}')^{\alpha/2},$$

其中 K 为一仅与 $\varphi(U)$ 有关的常数，$0<\alpha\leqslant 1$，则称 $\varphi(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(m, n)$ 上属于 $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

我们首先证明

引理 5.3.1 若 $\varphi(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(m, n)$ 上属于 $\mathrm{Lip}\,\alpha\ (0<\alpha\leqslant 1)$，则

$$g(u)=(V(\mathscr{L}_I(m-1, n-1))^{-1}\int_{w\bar{w}'=I^{(m-1)}}\varphi\begin{pmatrix}u\\(0, w)\bar{P}'\end{pmatrix}\dot{w}$$

在 $u\bar{u}'=1$ 上亦属于 $\mathrm{Lip}\,\alpha$，其中 P 为 n 阶酉方阵，使得 $uP=(1, 0, \cdots, 0)$.

证 令
$$g_1(u)=\int_{w\bar{w}'=I}\varphi\begin{pmatrix}u\\(0, w)\bar{P}'\end{pmatrix}\dot{w},$$

$$g_1(v)=\int_{w\bar{w}'=1}\varphi\begin{pmatrix}v\\(0, w)\bar{P}_1'\end{pmatrix}\dot{w},$$

其中 $u=(1, 0, \cdots, 0)\bar{P}'$, $v=(1, 0, \cdots, 0)\bar{P}_1'$. P, P_1 皆为酉方阵. 于是

$$
\begin{aligned}
|g_1(u)-g_1(v)| &\leqslant \left|\int_{w\bar{w}'=I} \varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}\bar{P}'\right)\right. \\
&\qquad \left.-\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}\bar{P}_1'\right)\dot{w}\right| \\
&\leqslant \int_{w\bar{w}'=I}\left|\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}\bar{P}'\right)\right. \\
&\qquad \left.-\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}\bar{P}_1'\right)\right|\dot{w}.
\end{aligned}
$$

因为 $\varphi(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(m, n)$ 上属于 $\operatorname{Lip}\alpha$, 所以

$$
\begin{aligned}
&|g_1(u)-g_1(v)| \\
&\leqslant K\int_{w\bar{w}'=I}\left[t_r\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}(\bar{P}'-\bar{P}_1')(P-P_1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \bar{w}'\end{pmatrix}\right)\right]^{\frac{\alpha}{2}}\dot{w} \\
&=K\int_{w\bar{w}'=I}\left[t_r(\bar{P}'-\bar{P}_1')(P-P_1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \bar{w}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}\right]^{\frac{\alpha}{2}}\dot{w} \\
&=K_1[t_r(2I-\bar{P}'P_1-\bar{P}_1'P)]^{\frac{\alpha}{2}} \\
&=K_1[t_r(2I-B-\bar{B}')]^{\frac{\alpha}{2}}=K_1[t_r(I-B)\overline{(I-B)}']^{\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}
$$

此处 $K_1=K\cdot V(\mathscr{L}_I(m-1, n-1))$, $B=P_1\bar{P}'$.

显然 $u=vP_1\bar{P}'=vB$. 值得注意的是, 这里的酉方阵 B, 在满足 $u=vB$ 的前提下, 是任意的. 事实上, 可先取一酉方阵 P, 使 $u=(1, 0, \cdots, 0)\bar{P}'$, 再任取一酉方阵 B, 只要满足 $u=vB$, 令 $P_1=BP$, 则必有 $v=uB^{-1}=uP\bar{P}_1'=(1, 0, \cdots, 0)\bar{P}_1'$.

习知对于 u, v, 存在酉方阵 A, 使

$$
vA=(1, 0, \cdots, 0)=v_0,
$$

$$
uA=(a, b, 0, \cdots, 0)=u_0, \quad |a|^2+|b|^2=1.
$$

令 $C=\bar{A}'BA$, 便有

$$u_0 = uA = vBA = v_0\overline{A}'BA = v_0C.$$

显然此处的酉方阵C，在满足$u_0 = v_0C$的前提下，也是任意的．我们取

$$C = \begin{pmatrix} a, & b & \\ -\overline{b}, & \overline{a} & \\ & & I^{(n-2)}, \end{pmatrix},$$

于是
$$t_r((I-C)\overline{(I-C)}') = 2(|1-a|^2 + |b|^2) = 4(1-\mathrm{Re}\, a),$$

而
$$(u-v)\overline{(u-v)}' = (u_0 - v_0)\overline{(u_0 - v_0)}' = |1-a|^2 + |b|^2 = 2(1-\mathrm{Re}\, a),$$

所以
$$t_r((I-B)\overline{(I-B)}') = t_r((I-C)\overline{(I-C)}') = 2(u-v)\overline{(u-v)}'.$$

因之，最后得到

$$|g(u)-g(v)| = (V(\mathscr{L}_I(m-1, n-1)))^{-1}|g_1(u)-g_1(v)| = O([(u-v)\overline{(u-v)}']^{\frac{\alpha}{2}}).$$

引理得证．

§5.4 $\mathscr{R}_I(m, n)$的Cauchy型积分在$\mathscr{L}_I^{(m-1)}$上的极限值

应用引理5.3.1，我们有

定理5.4.1 若$\varphi(U)$在$\mathscr{L}_I(m, n)$上属于$\mathrm{Lip}\,\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$，则Cauchy型积分

$$F(Z) = (V(\mathscr{L}_I(m, n)))^{-1}\int_{\mathscr{L}_I(m,n)} \varphi(U)\det(I - Z\overline{U}')^{-n}\dot{U} \tag{5.4.1}$$

当$Z = U_0\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}V_0 \in \mathscr{R}_I(m, n)$趋于点$Q = U_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}V_0 \in \mathscr{L}_I^{(m-1)}$时，其极限值是存在的，并且等于

$$\mathrm{v.p.}(V(\mathscr{L}_I(m,n)))^{-1}\int_{\mathscr{L}_I(m,n)}\varphi(U)\det(I-Q\bar{U}')^{-n}\dot{U}$$

$$+\frac{1}{2}\det(I-Z_1\bar{Z}_1')^{-1}(V(\mathscr{L}_I(m-1,n-1)))^{-1}$$

$$\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}\varphi\left(U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_1\end{pmatrix}V_0\right)\det(I-U_1\bar{Z}_1')$$

$$\cdot\det(I-Z_1\bar{U}_1')^{1-n}\dot{U}_1 \qquad (5.4.2)$$

其中 v.p. 之意义为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(V(\mathscr{L}_I(m,n)))^{-1}\int_{\mathscr{L}_I(m,n,\varepsilon)}\varphi(U)\det(I-Q\bar{U}')^{-n}\dot{U}, \qquad (5.4.3)$$

这里 $\mathscr{L}_I(m,n,\varepsilon)$ 表示点集 $\{U\,|\,U\in\mathscr{L}_I(m,n),\ |\det(I-Q\bar{U}')|\geqslant\varepsilon|\det(I-T_0\bar{U}')|\}$ 而 $T_0=U_0'\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}V_0$.

证 (i) 先设 $Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & O^{(m-1,n-1)}\end{pmatrix}$, 取 $Z=\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & O^{(m-1,n-1)}\end{pmatrix}$, $0<\rho<1$, 令

$$g(u)=\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m-1,n-1))}\int_{w\bar{w}'=I}\varphi\begin{pmatrix} & u\\ (0 & w)\bar{P}'\end{pmatrix}\dot{w},$$

其中 P 为引理 5.3.1 所述. 则

$$F(Z)=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}g(u)(1-\rho\bar{u}_1')^{-n}\dot{u},$$

此处 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, ω_{2n-1} 表示 $u\bar{u}'=1$ 的体积. 根据引理 5.3.1, $g(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上属于 Lip α, 由定理 1.4.2, 便有

$$\lim_{z\to Q}F(Z)=\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}g(u)(1-\rho\bar{u}_1)^{-n}\dot{u}$$

$$=\mathrm{v.p.}\ \frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{g(u)}{(1-\bar{u}_1)^n}\dot{u}$$

$$+\frac{1}{2}g(1,0,\cdots,0)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{u\bar{u}'=1\\ |1-\bar{u}_1|>\varepsilon}}\frac{g(u)}{(1-\bar{u}_1)^n}\dot{u}\\
&\quad+\frac{1}{2}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m-1,n-1))}\\
&\quad\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)} f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&U_1\end{pmatrix}\right)\dot{U}_1\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m,n))}\\
&\quad\cdot\int_{\substack{\mathscr{L}_I(m,n)\\ |\det(I-Q\bar{U}')|>\varepsilon}}\frac{\varphi(U)}{\det(I-Q\bar{U}')^n}\dot{U}\\
&\quad+\frac{1}{2}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m,n))}\\
&\quad\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}\varphi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&U_1\end{pmatrix}\right)\dot{U}_1\\
&= \text{v. p. }\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m,n))}\int_{\mathscr{L}_I(m,n)}\frac{\varphi(U)}{\det(I-Q\bar{U}')^n}\dot{U}\\
&\quad+\frac{1}{2}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m-1,n-1))}\\
&\quad\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}\varphi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&U_1\end{pmatrix}\right)\dot{U}_1.
\end{aligned}
$$

(ii) 在$\mathscr{L}_I^{(m-1)}$上任取一点$Q=U_0'\begin{pmatrix}1&0\\0&Z_1\end{pmatrix}V_0$, $Z,\bar{Z}_1'<I^{(m-1)}$. 令$Z=U_0'\begin{pmatrix}\rho&0\\0&Z_1\end{pmatrix}V_0$趋于$Q$. 先作$\mathscr{R}_I$的运动群$\Gamma^I$中的变换$W=\Phi(Z)$: $W=A(Z-T_0)(I-\bar{T}_0'Z)^{-1}D^{-1}$, 将$T_0=U_0'\begin{pmatrix}0&0\\0&Z_1\end{pmatrix}V_0$变到原点, 其中$A^{(m)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&A_1\end{pmatrix}\bar{U}_0'$, $D^{(n)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&D_1\end{pmatrix}V_0$, A_1, D_1分别满足$\bar{A}_1'A=(I-Z_1\bar{Z}_1')^{-1}$, $\bar{D}_1'D_1=(I-\bar{Z}_1'Z_1)^{-1}$. 相应地, $W=\Phi(Z)$将已与之点Z变为$W=\begin{pmatrix}\rho&0\\0&0\end{pmatrix}$, 将$Q$变为$Q_0=$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，其逆变换成为 $Z=\Phi^{-1}(W)$，在 $\mathscr{L}_I(m,n)$ 上即为 $U=\Phi^{-1}(V)$，利用熟知的关系式

$$\det(I-W\overline{V}')^{-1}\det(I-Z\overline{U}')$$
$$=\det(I-T_0\overline{T}_0')^{-1}\det(I-T_0\overline{U}')\det(I-Z\overline{T}_0')$$

及
$$\dot{V}=\det(I-T_0\overline{T}')^{n}|\det(I-T_0\overline{U}')|^{-2n}\dot{U},$$

可得
$$\det(I-W\overline{V}')^{-n}\dot{V}=\det(I-Z\overline{U}')^{-n}$$
$$\cdot(\det(I-Z\overline{T}_0')\det(I-U\overline{T}_0')^{-1})^{n}\dot{U},$$

于是
$$\lim_{Z\to Q}F(Z)=\lim_{W\to Q_0}\frac{1}{\det(I-\Phi^{-1}(W)\overline{T}_0')^{n}V(\mathscr{L}_I(m,n))}$$
$$\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m,n)}\frac{g(V)}{\det(I-W\overline{V}')^{n}}\dot{V},$$

其中 $g(V)=f(\Phi^{-1}(V))(\det(I-\Phi^{-1}(V)\overline{T}_0')^{n}$，显然 $g(V)$ 在 $\mathscr{L}_I(m,n)$ 上属于 Lipα. 由(i)便知

$$\lim_{Z\to Q}F(Z)=\det(I-\Phi^{-1}(Q_0)\overline{T}_0')^{-1}$$
$$\cdot\Bigg[\text{v. p. }\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m,n))}$$
$$\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m,n)}\frac{g(V)}{\det(I-Q_0\overline{V}')^{n}}\dot{V}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m-1,n-1))}$$
$$\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}g\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & V_1\end{pmatrix}\dot{V}_1\Bigg]=J_1+J_2$$

其中
$$J_1=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m,n))}$$
$$\cdot\int_{\substack{\mathscr{L}_I(m,n)\\|\det(I-Q_0\overline{V}')|>\varepsilon}}\frac{\varphi(\Phi^{-1}(V))\det(I-\Phi^{-1}(V)\overline{T}_0')^{n}}{\det(I-Q_0\overline{V}')^{n}\det(I-\Phi^{-1}(Q_0)\overline{T}_0')^{n}}\dot{V}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m,n))}\int_{\mathscr{L}_I(m,n,\varepsilon)}\varphi(U)\det(I-Q\overline{U}')^{-n}\dot{U}$$

取之定义为

$$\text{v. p.} \frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m, n))}\int_{\mathscr{L}_I(m,n)} \frac{\varphi(U)}{\det(I-Q\overline{U}')^n}\dot{U},$$

关于积分区域之确定，用到如下事实：将所取之 Z, W 及 T_0 代入

$$\det(I-W\overline{V}')=\det(I-Z\overline{U}')\det(I-T_0\overline{T}_0')$$
$$\cdot\det(I-T_0\overline{U}')^{-1}\det(I-Z\overline{T}_0')^{-1},$$

注意到 $\det(I-T_0\overline{T}_0')=\det(I-Z\overline{T}_0')$，并令 Z 趋于 Q，相应地，W 趋于 Q_0，因而对 V 的积分区域 $|\det(I-Q_0\overline{V}')|\geqslant\varepsilon$，经变换 $V=\Phi(U)$，则变为对 U 的积分区域 $|\det(I-Q\overline{U}')|\geqslant\varepsilon|\det(I-T_0\overline{U}')|$.

再看 J_2，由于在变换 $W=\Phi(Z)$ 下，$\mathscr{L}_I(m, n)$ 上的点 $U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_1\end{pmatrix}V_0$ 变为 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & V_1\end{pmatrix}$，且有

$$V_1=A_1(U_1-Z_1)(I-\overline{Z}_1'U_1)^{-1}D_1^{-1},$$

因而 $\quad \dot{V}_1=\det(I-Z_1\overline{Z}_1')^{n-1}|\det(I-Z_1\overline{U}_1')|^{-2(n-1)}\dot{U}_1,$

所以

$$J_2=\frac{1}{2V(\mathscr{L}_I(m-1, n-1))}$$
$$\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}\varphi\left(\Phi^{-1}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & V_1\end{pmatrix}\right)\right)$$
$$\cdot\frac{\det\left(I-\Phi^{-1}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & V_1\end{pmatrix}\overline{T}_0'\right)\right)^n}{\det(I-\Phi^{-1}(Q_0)\overline{T}_0')^n}\dot{V}_1$$
$$=\frac{1}{2V(\mathscr{L}_I(m-1, n-1))}$$
$$\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}\varphi\left(U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_1\end{pmatrix}V_0\right)$$
$$\cdot\frac{\det(I-U_1\overline{Z}_1')^n\det(I-Z_1\overline{Z}_1')^{n-1}}{\det(I-Z_1\overline{Z}_1')^n|\det(I-Z_1\overline{U}_1')|^{2(n-1)}}\dot{U}_1$$
$$=\frac{1}{2\det(I-Z_1\overline{Z}_1')V(\mathscr{L}_I(m-1, n-1))}$$

$$\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}\varphi\left(U_0'\begin{pmatrix}1&0\\0&U_1\end{pmatrix}V_0\right)$$

$$\cdot\frac{\mathrm{dot}(I-U_1\bar{Z}_1')}{\det(I-Z_1\bar{U}_1')^{n-1}}\dot{U}_1.$$

综合上面所证，便得公式(5.4.2)。

应用定理 5.4.1，我们还可得到

定理 5.4.2 若 $\varphi(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(n)$ 上属于 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$，则 $\mathscr{R}_I^*(n)$ 的 Cauchy 型积分

$$F(Z)=\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(n))}\int_{\mathscr{L}_I(n)}\frac{\varphi(U)}{\det(I-Z\bar{U}')^n}\dot{U}\qquad(5.4.4)$$

当 $Z=U_0'\begin{pmatrix}\rho&0\\0&Z_1\end{pmatrix}V_0\in\mathscr{R}_I^*(n)$ $(\rho>1)$ 趋于 $\mathscr{L}_I^{*(n-1)}$ 上的点 $Q^*=U_0'\begin{pmatrix}1&0\\0&Z_1\end{pmatrix}V_0$ 时的极限值是存在的，并且等于

$$\mathrm{v.\,p.}\ \frac{1}{V(\mathscr{L}_I(n))}\int_{\mathscr{L}_I(n)}\frac{\varphi(U)}{\det(I-Q^*\bar{U}')^n}\dot{U}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\det(I-Z_1\bar{Z}_1')V(\mathscr{L}_I(n-1))}$$

$$\cdot\int_{\mathscr{L}_I(n-1)}\varphi\left(U_0'\begin{pmatrix}1&0\\0&U_1\end{pmatrix}V_0\right)$$

$$\cdot\frac{\det(I-U_1\bar{Z}_1')}{\det(I-Z_1\bar{U}_1')^{1-n}}\dot{V}_1,\qquad(5.4.5)$$

此处 v. p. 之意义为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(n))}\int_{\mathscr{L}_I^*(n,\varepsilon)}\frac{\varphi(U)}{\det(I-Q^*\bar{U}')^n}\dot{U},\qquad(5.4.6)$$

其中 $\mathscr{L}_I^*(n,\varepsilon)$ 表示点集 $\{U\,|\,U\in\mathscr{L}_I(n),\ |\det(Q^*-U)|\geqslant\varepsilon|\det(Q^*-Q_0^*U)|\}$，而 $Q_0^*=U_0'\begin{pmatrix}0&0\\0&I^{(n-1)}\end{pmatrix}\bar{U}_0$。

上述定理的证明是容易的，令 $Z^{-1}=W$，相应地，$U^{-1}=V$，记

$\psi(V)=\varphi(V^{-1})\det V^{-n}$，则因 $\dot{U}=\dot{V}$，便得到

$$G(W)=F(W^{-1})$$

$$=(-1)^{n^2}\frac{\det W^n}{V(\mathscr{L}_I(n))}\int_{\mathscr{L}_I(n)}\frac{\psi(V)}{\det(I-W\overline{V}')^n}\dot{V}.$$

由于 $\psi(V)$ 满足定理 5.4.1 中的条件，当 $Z\to Q^*$ 时，$W=\overline{V}_0'\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & W_1\end{pmatrix}U_0\in\mathscr{R}_I(n)$ 趋于 $\mathscr{L}_I^{(n-1)}$ 的点 $Q=Q^{*-1}=\overline{V}_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & W_1\end{pmatrix}\overline{U}_0$，其中 $0<\lambda=\frac{1}{\rho}<1$，$W_1=Z_1^{-1}$，于是应用定理 5.4.1 以及变换 $Z^{-1}=W$，$U^{-1}=V$，即得公式(5.4.5)。

如果我们以定理 1.6.2. 替代定理 1.4.2，则可以推广定理 5.4.1 及定理 5.4.2 如下：

定理 5.4.3 若 $\varphi(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(m,n)$ 上属于 $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leqslant1)$，则 Cauchy 型积分(5.4.1)当 $Z=U_0'\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}V_0\in\mathscr{R}_I(m,n)$ 趋于点 $Q=U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}V_0\in\mathscr{L}_I^{(m-1)}$ 时，其极限值是存在的，并且等于

$$\text{v. p.}\ \frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m,n))}\int_{\mathscr{L}_I(m,n)(\gamma)}\varphi(U)\det(I-Q\overline{U}')^{-n}\dot{U}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\det(I-Z_1\overline{Z}_1')^{-1}(V(\mathscr{L}_I(m-1,n-1)))^{-1}$$

$$\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}\varphi\left(U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_1\end{pmatrix}V_0\right)\det(I-U_1\overline{Z}_1')$$

$$\cdot\det(I-Z_1\overline{U}_1')^{1-n}\dot{U}_1$$

其中 v. p. 的定义为

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m,n))}\int_{\substack{\mathscr{L}_I(m,n)\\ \alpha^2(\mathrm{Re}\det S_1)^2+\beta^2(\mathrm{Im}\det S_1)^2\geqslant\varepsilon^2}}\frac{\varphi(U)}{\det(I-Q\overline{U}')^n}\dot{U},$$

这里 $S_1=I-Q\overline{U}'-U\overline{T}_0'+Q\overline{T}_0'$，$T_0=U_0'\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}V_0$，$\gamma=\alpha/\beta$，$\alpha\geqslant0$，$\beta\geqslant0$。

特别取 $\beta=0$ 时，就有

$$\lim_{Z\to Q} F(Z)$$

$$=\text{v. p.}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m,n))}\int_{\mathscr{L}_I(m,n)(\infty)}\frac{\varphi(U)}{\det(I-Q\overline{U}')^n}\dot{U},$$

这里 v. p. 的定义为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m,n))}\int_{\substack{\mathscr{L}_I(m,n)\\ \text{Re}\det s_1>\varepsilon}}\frac{\varphi(U)}{\det(I-Q\overline{U}')^n}\dot{U}.$$

也就是 Cauchy 型积分的极限值可以用一种 Cauchy 主值来表示之.

显然定理 5.4.3 是定理 5.4.1 的推广，以下的定理 5.4.4 是定理 5.4.2 的推广.

定理 5.4.4　若 $\varphi(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(n)$ 上属于 $\text{Lip}\,\alpha\ (0<\alpha\leqslant 1)$，则 $\mathscr{R}_I^*(n)$ 的 Cauchy 型积分 (5.4.4)，当 $Z=U_0'\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}V_0\in\mathscr{R}_I^*(n)$ $(\rho>1)$ 趋于 $\mathscr{L}_I^{*(n-1)}$ 上的点 $Q^*=U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}V_0$ 时的极限值是存在的，且等于

$$\text{v. p.}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(n))}\int_{\mathscr{L}_I(n)(\gamma)}\frac{\varphi(U)}{\det(I-Q^*\overline{U}')^n}\dot{U}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\frac{1}{\det(I-Z_1\overline{Z}_1')V(\mathscr{L}_I(n-1))}$$

$$\cdot\int_{\mathscr{L}_I(n-1)}\varphi\left(U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_1\end{pmatrix}V_0\right)\frac{\det(I-U_1\overline{Z}_1')}{\det(I-Z_1\overline{U}_1')^{n-1}}\dot{U}_1,$$

其中 v. p. 的意义为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(n))}\int_{\substack{\mathscr{L}_I(n)\\ \alpha^2(\text{Re}\det S_1)^2+\beta^2(\text{Re}\det S_2)^2>\varepsilon^2}}\varphi(U)\det(I-Q^*\overline{U}')^{-n}\dot{U},$$

这里

$$S_2=Q^*\overline{Q}^*+\overline{Q}_0^*-U\overline{Q}^*-Q^*\overline{U}'\overline{Q}_0'^*,$$

$$Q_0^*=U_0'\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I^{(n-1)}\end{pmatrix}\overline{U}_0.$$

特别取 $\beta=0$ 时，就有

$$\lim_{Z\to Q^*} F(Z)=\text{v.p.}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(n))}\int_{\mathscr{L}_I(n)(\infty)}\varphi(U)\det(I-Q^*\overline{U}')^{-n}\dot{U},$$

这里 v. p. 的定义为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(n))}\int_{\substack{\mathscr{L}_I(n)\\ \operatorname{Re}\det S_1>\varepsilon}}\varphi(U)\det(I-Q^*\overline{U}')^{-n}\dot{U}.$$

也就是这时 Cauchy 型积分的极限值也可以用一种 Cauchy 主值来表示之.

同样，以定理 1.8.2 代替定理 1.4.2，则定理 5.4.1 中的 (5.4.2) 可以替代为

$$\begin{aligned}&\text{v. p.}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(m, n))}\int_{\mathscr{L}_I(m,n)(b)}\varphi(U)\det(I-Q\overline{U}')^{-n}\dot{U}\\&+b\det(I-Z_1\overline{Z}_1')^{-1}V(\mathscr{L}_I(m-1, n-1))^{-1}\\&\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}\varphi\left(U_0'\begin{pmatrix}1&0\\0&U_1\end{pmatrix}V_0\right)\det(I-U_1\overline{Z}_1')\\&\cdot\det(I-Z_1\overline{U}_1')^{1-n}\dot{U}_1,\end{aligned}$$

而 (5.4.3) 可以替代为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(V(\mathscr{L}_I(m, n)))^{-1}\int_{\substack{\mathscr{L}_I(m,n)\\ \operatorname{Re}\det S_1>\alpha\varepsilon\\ \operatorname{Im}\det S_1>\beta\varepsilon}}\varphi(U)\det(I-Q\overline{U}')^{-n}\dot{U},$$

这里 S_1 由定理 5.4.3 中所定义，而

$$b=\frac{2^{n-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-\int_0^{\operatorname{arc tg}\frac{\beta}{\alpha}}\cos^{n-2}t\,\frac{\sin(n-1)t}{\sin t}\,dt\right\}.$$

而定理 5.4.2 中的 (5.4.5) 可以替代为

$$\begin{aligned}&\text{v. p.}\frac{1}{V(\mathscr{L}_I(n))}\int_{\mathscr{L}_I(n)(b)}\varphi(U)\det(I-Q^*\overline{U}')^{-n}\dot{U}\\&-b\det(I-Z_1\overline{Z}_1')^{-1}(V(\mathscr{L}_I(n-1))^{-1}\\&\cdot\int_{\mathscr{L}_I(n-1)}\varphi\left(U_0'\begin{pmatrix}1&0\\0&U_1\end{pmatrix}V_0\right)\det(I-U_1\overline{Z}_1')\\&\cdot\det(I-Z_1\overline{U}_1')^{1-n}\dot{U}_1.\end{aligned}$$

(5.4.6)可以替代为

$$\lim_{s\to 0}(V(\mathscr{L}_I(n)))^{-1}\int_{\substack{\mathscr{L}_I(m,n)\\ \operatorname{Re}\det S_2>\alpha s\\ \operatorname{Im}\det S_2>\beta s}}\varphi(U)\det(I-Q^b\overline{U}')^{-n}\dot{U},$$

这里 S_2 由定理5.4.4中所定义，而 b 定义如前.

§5.5 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 内的 B-调和函数的边界性质

可以应用定理5.4.1, 5.4.3等来研究 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 的 B-调和函数的某些边界性质. 我们有

定理5.5.1 设 $f(Z)=u(Z)+iv(Z)$ 在 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 内解析，在 $\mathscr{R}_I(m,n)+\mathscr{L}_I(m,n)$ 上连续，并且 $u(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(m,n)$ 上属于 $\operatorname{Lip}\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$，则对于 $\mathscr{L}_I^{(m-1)}$ 上任一点 $Q=U_0'\begin{pmatrix}1&0\\0&Z_1\end{pmatrix}V_0$, $Z_1\overline{Z}_1'<I^{(m-1)}$，有

$$\begin{aligned}v(Q)=&\ \text{v. p. }(V(\mathscr{L}_I(m,n)))^{-1}\\&\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m,n)}u(U)i^{-1}(H(Q,\overline{U})-H(\overline{U},\overline{Q}'))\dot{U}\\&+\frac{1}{2}(\det(I-Z_1\overline{Z}_1')V(\mathscr{L}_I(m-1,n-1)))^{-1}\\&\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}u\left(U_0'\begin{pmatrix}1&0\\0&U_1\end{pmatrix}V_0\right)i^{-1}\\&\cdot(T(Z_1,\overline{U}_1)-T(U_1,\overline{Z}_1))\dot{U}_1+v(0).\end{aligned}\qquad(5.5.1)$$

其中
$$H(Q,\overline{U})=\det(I-Q\overline{U}')^{-n},$$
$$T(Z_1,\overline{U}_1)=\det(I-U_1\overline{Z}_1')\det(I-Z_1\overline{U}_1')^{1-n}.$$

证 利用 $\mathscr{R}_I(m,n)$ 内解析函数的Schwarz公式(参阅§0.2)，我们有

$$\begin{aligned}f(Z)=&(V(\mathscr{L}_I(m,n)))^{-1}\\&\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m,n)}u(U)S(Z,\overline{U})\dot{U}+iv(0),\end{aligned}\qquad(5.5.2)$$

其中 Schwarz 核 $S(Z, U)=2\det(I-Z\overline{U}')^{-n}-1$. 令

$$Z=U_0'\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}V_0$$

趋于 Q, $\lim\limits_{Z\to Q}f(Z)=f(Q)$是存在的, 而(5.5.2)式之右端的极限值, 可由定理 5.4.1 得出, 于是有

$$\begin{aligned}f(Q)&=\text{v. p. }2\cdot(V(\mathscr{L}_I(m, n)))^{-1}\\&\quad\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m,n)}u(U)\det(I-Q\overline{U}')^{-n}\dot{U}+\frac{\det(I-Z_1\overline{Z}_1')}{V(\mathscr{L}_I(m-1, n-1))}\\&\quad\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}u\left(U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_1\end{pmatrix}V_0\right)\frac{\det(I-U_1\overline{Z}_1')}{\det(I-Z_1\overline{U}_1')^{n-1}}\dot{U}_1\\&\quad-u(0)+iv(0),\end{aligned}$$

对上式两端取虚部, 便得(5.5.1).

利用变换 $Z^{-1}=W$, 容易得到

定理 5.5.2 设 $f(Z)=u(Z)+iv(Z)$ 在 $\mathscr{R}_I^*(n)$ 内解析, 在 $\mathscr{R}_I^*(n)+\mathscr{L}_I(n)$上连续, 并且 $u(U)$在 $\mathscr{L}_I(n)$ 上属于 $\text{Lip}\,\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$, 则对于 $\mathscr{L}_I^*(n-1)$上任一点 $Q^*=U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}V_0$, $Z_1\overline{Z}_1'>I^{(n-1)}$ 有

$$\begin{aligned}v(Q^*)&=\text{v. p. }(V(\mathscr{L}_I(n)))^{-1}\\&\quad\cdot\int_{\mathscr{L}_I(n)}u(U)i^{-1}(H^*(Q^*, \overline{U}')-H^*(U, \overline{Q}^*))\dot{U}\\&\quad-(2\det(I-Z_1\overline{Z}_1')V(\mathscr{L}_I(n-1)))^{-1}\\&\quad\cdot\int_{\mathscr{L}_I(n-1)}u\left(U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_1\end{pmatrix}V_0\right)i^{-1}(T^*(Z_1, \overline{U}_1)\\&\quad-T^*(U_1, Z_1))\dot{U}_1+v(Z_\infty),\end{aligned}\tag{5.5.3}$$

其中

$$H^*(Q^*, \overline{U})=(-1)^{n^2}\det(Q^*\overline{U})^n\det(I-Q^*\overline{U}')^{-n},$$

$$T^*(Z_1, \overline{U}_1)=(-1)^{n^2}\det(Z_1\overline{U}_1)\det(I-U_1\overline{Z}_1')\det(I-Z_1\overline{U}')^{1-n}.$$

Z_∞ 表示 Grassmann 流形中，齐次坐标 $(Z_1, Z_2)=(O^{(n)}, I^{(n)})$ 的无穷远点（非齐次坐标 Z 与齐次坐标 (Z_1, Z_2) 的关系为 $Z=Z_1^{-1}Z_2$）.

定理 5.5.1 及 5.5.2 中的 Cauchy 主值的定义由定理 5.4.1 所给出.

同样，我们可以推广定理 5.5.1 及 5.5.2 如下：

定理 5.5.3　设 $f(Z)=u(Z)+iv(Z)$ 在 $\mathscr{R}_I(m, n)$ 内解析，在 $\mathscr{R}_I(m, n)+\mathscr{L}_I(m, n)$ 上连续，并且 $u(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(m, n)$ 上属于 $\mathrm{Lip}\,\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$，则对于 $\mathscr{L}_I^{(m-1)}$ 上任一点 $Q=U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}V_0$，$Z_1\bar{Z}_1'<I^{(m-1)}$ 有

$$\begin{aligned}v(Q)=&\mathrm{v.\,p.}\,(V(\mathscr{L}_I(m, n)))^{-1}\\&\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m,n)(\gamma)}u(U)i^{-1}(H(Q, \overline{U})-H(U, \overline{Q}))\dot{U}\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}\cdot(\det(I-Z_1\bar{Z}_1')V(\mathscr{L}_I(m-1, n-1))^{-1}\\&\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)}u\left(U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & U_1\end{pmatrix}V_0\right)i^{-1}\\&\cdot(T(Z_1, \overline{U}_1)-T(U_1, \bar{Z}_1))\dot{U}_1+v(0),\end{aligned}$$

其中 $H(Q, \overline{U})$ 及 $T(Z_1, \overline{U}_1)$ 由定理 5.5.1 中所给出.

特别取 $\beta=0$，就有

$$\begin{aligned}v(Q)=&\mathrm{v.\,p.}\,(V(\mathscr{L}_I(m, n)))^{-1}\\&\cdot\int_{\mathscr{L}_I(m,n)(\infty)}u(U)i^{-1}(H(Q, \overline{U})-H(U, \overline{Q}))\dot{U}+v(0),\end{aligned}$$

也就是 v 可以用 u 的一种 Cauchy 积分的主值来表达之.

定理 5.5.4　设 $f(Z)=u(Z)+iv(Z)$ 在 $\mathscr{R}_I^*(n)$ 内解析，在 $\mathscr{R}_I^*(n)+\mathscr{L}_I(n)$ 上连续，并且 $u(U)$ 在 $\mathscr{L}_I(n)$ 上属于 $\mathrm{Lip}\,\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$，则对 $\mathscr{L}_I^*(n-1)$ 上任一点 $Q^*=U_0'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}V_0$，$Z_1\bar{Z}_1'>$

$I^{(n-1)}$, 有

$$
\begin{aligned}
v(Q^*) = \text{v. p. } & (V(\mathscr{L}_I(n)))^{-1} \\
& \cdot \int_{\mathscr{R}_I(n)(\gamma)} u(U) i^{-1} (H^*(Q^*, \bar{U}) - H^*(U, \bar{Q}^*)) \dot{U} \\
& - \frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1} \\
& \cdot (\det(I - Z_1 \bar{Z}_1') V(\mathscr{L}_I(n-1)))^{-1} \\
& \cdot \int_{\mathscr{L}_I(n-1)} u\left(U_0' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0\right) i^{-1} (T^*(Z_1, \bar{U}_1) \\
& - T^*(U_1, \bar{Z}_1)) \dot{U}_1 + v(Z_\infty),
\end{aligned}
$$

其中 $H^*(Q^*, \bar{U})$, $T^*(Z_1, \bar{U}_1)$由定理 5.5.2 中所给出.

在定理 5.5.3 及定理 5.5.4 中的 Cauchy 主值分别由定理 5.4.3 及定理 5.4.4 所给出.

同样, (5.5.1)式可以替代为

$$
\begin{aligned}
v(Q) = \text{v. p. } & (V(\mathscr{L}_I(m, n)))^{-1} \\
& \cdot \int_{\mathscr{L}_I(m,n)(b)} u(\bar{U}) i^{-1} (H(Q, \bar{U}) - H(U, \bar{Q})) \dot{U} \\
& + b(\det(I - Z_1 \bar{Z}_1') V(\mathscr{L}_I(m-1, n-1)))^{-1} \\
& \cdot \int_{\mathscr{L}_I(m-1,n-1)} u\left(U_0' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0\right) i^{-1} (T(Z_1, \bar{U}_1) \\
& - T(U_1, \bar{Z}_1)) \dot{U}_1 + v(0).
\end{aligned}
$$

这里 v. p. 的意义为

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} (V(\mathscr{L}_I(m, n)))^{-1} \int_{\substack{\mathscr{L}_I(m,n) \\ \operatorname{Re}\det s_1 \geq \alpha\varepsilon \\ \operatorname{Im}\det s_1 \geq \beta\varepsilon}},
$$

$$
b = \frac{2^{n-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}} \cos^{n-2} t \, \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} \, dt\right\}.
$$

(5.5.3)式可以替代为

$$
\begin{aligned}
v(Q^*) = \text{v. p.}\ & (V(\mathscr{L}_I(n)))^{-1} \\
& \cdot \int_{\mathscr{L}_I(n)(b)} u(U) i^{-1}(H^*(Q^*, \overline{U}) - H^*(U, \overline{Q}^*))\dot{U} \\
& - b(\det(I - Z_1 \overline{Z}_1') \cdot V(\mathscr{L}_I(n-1)))^{-1} \\
& \cdot \int_{\mathscr{L}_I(n-1)} u\left(U_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0\right) i^{-1}(T^*(Z_1, \overline{U}_1) \\
& - T^*(U_1, \overline{Z}_1))\dot{U}_1 + v(Z_\infty).
\end{aligned}
$$

第六章　强拟凸域的 Henkin 型积分

§6.1　引　　言

在§0.4中，介绍了强拟凸域的 Henkin-Ramirez 核及 Stein-Kerzman 核. 分别记为 H-R 核及 S-K 核. 这两个核都是满足§0.2中的四项要求的. 尤其重要的是：这是两个解析的核. 若 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 为有界、光滑、强拟凸域，$H(z, w)$ 为其 H-R 核或 S-K 核，这里 $z\in\Omega$, $w\in b\Omega$. 由于 $H(z, w)$ 为 z 的解析函数，所以，如果 $u(w)\in L(b\Omega)$，那末 Cauchy 型积分（或称之为 Henkin 型积分）

$$\int_{w\in b\Omega} H(z, w)u(w)d\sigma_w,\ \ z\in\Omega,\ w\in b\Omega \qquad (6.1.1)$$

为 z 的解析函数，这里 $d\sigma_w$ 为 $b\Omega$ 上的 Lebesgue 体积元素.

这一章的内容为：将第一、二章中的结果推广到一般的强拟凸域上去，讨论了当 z 从 Ω 内沿着非切线方向趋于边界时，Henkin 型积分的极限值，先给出一个一般的 Plemelj 公式，之后分别对两种特殊的情形进行仔细的讨论，这里也包含了 Alt[1] 及 Kerzman 与 Stein[1] 的结果.

在这一章的最后，还讨论了由 (0.3.5) 所定义的 Bochner-Martinelli 核（记作 B–M 核）所定义的 Bochner-Martinelli 型积

分(记作 B-M 型积分).

这一章的内容取自龚昇[2],龚昇、史济怀[2, 4].

超球是最重要的强拟凸域,而强拟凸域在边界上一点附近可以用 Heisenberg 群曲面来逼近之. 事实上,我们可以有如下的定理(参阅 Alt[1], Folland 与 Stein[1]).

定理 6.1.1 若 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 中光滑、有界、强拟凸域, $0\in b\Omega$, $H(z, w)$为 H-R 核或 S-K 核, 则在 $w=0$ 的附近, 存在一个局部解析变换,使 $b\Omega$ 成为

$w\in b\Omega$, 当且仅当 $w_n=t+i\tau$ 满足

$$\tau=|\xi|^2+\varepsilon(\xi, t), \tag{6.1.2}$$

这里 $w=(w_1, \cdots, w_n)$, $\xi=(w_1, \cdots, w_{n-1})$, $|\xi|^2=\xi\bar{\xi}'$, 误差部分 ε 是三阶的. 即

$$|\varepsilon(\xi, t)|=O(\rho^3), \tag{6.1.3}$$

这里 $\rho^4=|\xi|^4+t^2$,而 $H(0, w)$成为

$$H(0, w)=\gamma_n\frac{1}{(|\xi|^2+it)^n}+\phi(w), \tag{6.1.4}$$

这里 $\phi(w)$当 $w\in b\Omega$ 时为绝对可积函数, γ_n 为常数.

显然$(\xi, t)\in\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}$,而 $\tau=|\xi|^2$ 为 Heisenberg 群曲面S_{n-1}, (6.1.2)表示 $b\Omega$ 在 $w=0$ 点附近,可以用 Heisenberg 群曲面 S_{n-1} 来逼近之. 而(6.1.3)的 $\varepsilon(\xi, t)$即为 $b\Omega$ 与 S_{n-1} 之间的误差程度. 事实上,还可以证明

$$\frac{1}{g^n(0, w)}=\frac{1}{(|\xi|^2+it)^n}(1+O(\rho)). \tag{6.1.5}$$

§6.2 一般的 Plemelj 公式

我们先来证明如下的一般 Plemelj 公式.

定理 6.2.1 设 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 中光滑、有界、强拟凸域, $H(z, w)$为

H-R 核或 S-K 核，$u\in C^\infty(b\Omega)$，

$$\mathbb{H}u(z)=\int_{w\in b\Omega}H(z,\ w)u(w)d\sigma_w,\quad z\in\Omega \tag{6.2.1}$$

为 Cauchy 型积分(或 Henkin 型积分)，这里 $d\sigma_w$ 为 $b\Omega$ 的 Lebesgue 面积元素，则 $\mathbb{H}u$ 为 z 的解析函数，且在 $\overline{\Omega}$ 上连续；当 $z\in b\Omega$ 时，

$$\text{v. p.}\int_{w\in b\Omega}H(z,\ w)u(w)d\sigma_w$$

$$\equiv\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{w\in b\Omega-D(z,\varepsilon)}H(z,\ w)u(w)d\sigma_w \tag{6.2.2}$$

存在，这里 $D(z,\ \varepsilon)$ 为 z 的邻域，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$D(z,\ \varepsilon)$ 缩成一点 z，且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{w\in D(z,\varepsilon)}H(z+\nu\delta,\ w)d\sigma_w=a \tag{6.2.3}$$

存在，a 为常数，ν 为 $b\Omega$ 在 z 的内法线．记(6.2.2)的值为 $\mathbb{H}_a u$，当 z_0 从 Ω 内部沿着非切线方向趋于 $z\in b\Omega$ 时，记

$$\mathbb{H}u(z)=\lim_{z_0\to z}\mathbb{H}u(z_0),$$

于是我们有 Plemelj 公式

$$\mathbb{H}u(z)=au(z)+\mathbb{H}_a u(z). \tag{6.2.4}$$

当 $D(z,\ \varepsilon)$ 取作 $\{w\in b\Omega,\ |g(w,\ z)|<\varepsilon\}$ 时，即为 Alt[1] 及 Kerzman-Stein[1] 定理．这时 $a=\frac{1}{2}$，而 Plemelj 公式成为

$$\mathbb{H}u(z)=\frac{1}{2}u(z)+\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}u(z). \tag{6.2.5}$$

现在来证定理 6.2.1.

固定 $z\in b\Omega$，不妨取 $z=0$．于是条件(6.2.3)成为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{w\in D(0,\varepsilon)}H(0+\delta\nu,\ w)d\sigma_w=a, \tag{6.2.6}$$

这里 ν 为内法线方向．于是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{w\in b\Omega-D(0,\varepsilon)} H(0+\delta\nu,\ w)u(w)d\sigma_w$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{w\in b\Omega-D(0,\varepsilon)} H(0+\delta\nu,\ w)(u(w)-u(0))d\sigma_w$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{w\in b\Omega-D(0,\varepsilon)} H(0+\delta\nu,\ w)u(0)d\sigma_w.$$

由于 $u\in C^\infty(b\Omega)$，故上式第一个积分存在，而第二个积分由(6.2.6)知为 $u(0)(1-a)$. 因之，对于 $0\in b\Omega$，可以有

$$\text{v. p.}\int_{w\in b\Omega} H(0,\ w)u(w)d\sigma_w$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{w\in b\Omega-D(0,\varepsilon)} H(0,\ w)u(w)d\sigma_w$$

$$=\int_{w\in b\Omega} H(0,\ w)(u(w)-u(0))d\sigma_w+u(0)(1-a).$$

因之，对于 $z\in b\Omega$，都可以有

$$\text{v. p.}\int_{w\in b\Omega} H(z,\ w)u(w)d\sigma_w$$

$$=\int_{w\in b\Omega} H(z,\ w)(u(w)-u(z))d\sigma_w+u(z)(1-a). \tag{6.2.7}$$

若 $z_0\in\Omega$，则显然有

$$\int H(z_0,\ w)u(w)d\sigma_w$$

$$=\int H(z_0,\ w)(u(w)-u(z_0))d\sigma_w+u(z_0)\int H(z_0,\ w)d\sigma_w$$

$$=I_1+I_2.$$

当 z_0 沿着非切线方向趋于 $b\Omega$ 的边界上一点 z 时，由(6.2.7)，

$$\lim_{z_0\to z} I_1=\int H(z,\ w)(u(w)-u(z))d\sigma_w$$

$$=\text{v. p.}\int_{w\in b\Omega} H(z,\ w)u(w)d\sigma_w-u(z)(1-a).$$

故当 $z\in b\Omega$ 时，

$$\mathbb{H}u(z)=\text{v. p.}\int_{w\in b\Omega}H(z,\ w)u(w)d\sigma_w-u(z)(1-a)+u(z)$$

$$=\text{v. p.}\int_{w\in b\Omega}H(z,\ w)u(w)d\sigma_w+au(z),$$

而此即为(6.2.4)。

来考察一下条件(6.2.3)。

由定理 6.1.1, 有局部解析变换, 在 $0\in b\Omega$ 附近, $b\Omega$ 可表为(6.1.2), $H(0,\ w)$ 可表为(6.1.4), $D(z,\ \varepsilon)$ 成为 $D(0,\ \varepsilon)$. 而(6.2.6)成为

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\delta\to0}\left(\int_{w\in D(0,\varepsilon)}(|\xi|^2+\delta+it)^{-n}d\mu\right.$$

$$\left.+\int_{w\in D(0,\varepsilon)}\phi_\delta(w)d\mu\right),$$

这里 $\phi_\delta(w)$ 当 $w\in b\Omega$ 时为绝对可积, 且 $\lim\limits_{\delta\to0}\phi_\delta(w)=\phi(w)$. 由于 $D(0,\ \varepsilon)$ 当 $\varepsilon\to0$ 时缩成一点. 显然有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\delta\to0}\int_{w\in D(0,\varepsilon)}\phi_\delta(w)d\mu=0.$$

故条件(6.2.3)成为

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\delta\to0}\int_{w\in D(0,\varepsilon)}(|\xi|^2+\delta+it)^{-n}d\mu=a.$$

作广义 Cayley 变换 T:

$$w_1=\frac{u_1}{1+u_n},\ \cdots,\ w_{n-1}=\frac{u_{n-1}}{1+u_n},\ w_n=i\frac{1-u_n}{1+u_n}.$$

由于 $w_n=t+i\tau$, 故

$$t=\frac{2\,\text{Im}\,u_n}{|1+u_n|^2},\qquad \tau=\frac{1-|u_n|^2}{|1+u_n|^2}.$$

于是 T 将 $|\xi|^2+it+\delta$ 变为

$$\frac{|u_1|^2+\cdots+|u_{n-1}|^2+2i\,\text{Im}\,u_n}{|1+u_n|^2}+\delta.$$

但 T 将广义上半平面 $\tau>0$, $\tau=|\xi|^2$ 映为 $u\bar{u}'=1$, 故上式即为

$$\frac{1+2i\,\mathrm{Im}\,u_n-|u_n|^2}{|1+u_n|^2}+\delta=\frac{(1+u_n)(1-\bar{u}_n)}{|1+u_n|^2}+\delta$$

$$=\frac{1-\bar{u}_n}{1+\bar{u}_n}+\delta=\frac{(1+\delta)-(1-\delta)\bar{u}_n}{1+\bar{u}_n}.$$

而 $d\mu=\frac{1}{\omega_{2n-1}}(1+\bar{v}_n)^{-n}\dot{u}$. 于是条件(6.2.6)成为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\in D(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1+\delta)^n\left(1-\frac{1-\delta}{1+\delta}\bar{u}_n\right)^n}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\in D(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_n)^n}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{w\in D(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho p_n\bar{u})^n}=a, \qquad (6.2.8)$$

此处 $p_n=(0,\cdots,0,1)$, $D(p_n,\varepsilon)$ 为 $D(0,\varepsilon)$ 经广义 Cayley 变换后, 所得到的 p_n 的邻域, $\rho=\frac{1-\delta}{1+\delta}$.

再来仔细考察 $D(z,\varepsilon)$. 在定理 6.1.1 中, 进行坐标变换时, 取 $g(w,0)=-it+\tau=-iw_n$. 所以, 如果 $D(z,\varepsilon)$ 的定义依赖于 $g(w,z)$, 则不妨将 $D(z,\varepsilon)$ 写成 $D(z,\varepsilon;\,\mathrm{Re}\,g,\,\mathrm{Im}\,g)$, 经坐标变换后成为 $D(0,\varepsilon;\mathrm{Re}\,g(w,0),\,\mathrm{Im}\,g(w,0))$, 或即为 $D(0,\varepsilon;\,\tau,-t)$, 经广义 Cayley 变换后成为 $D\left(p_n,\ \varepsilon;\ \frac{1-|u_n|^2}{|1+u_n|^2},\ \frac{-2\,\mathrm{Im}\,u_n}{|1+u_n|^2}\right)$. 例如: $D(z,\varepsilon;\,\mathrm{Re}\,g,\,\mathrm{Im}\,g)$ 为 $\alpha^2(\mathrm{Re}\,g)^2+\beta^2(\mathrm{Im}\,g)^2\leqslant\varepsilon^2$, 这可化为 $\alpha^2(1-|u_n|^2)^2+4\beta^2(\mathrm{Im}\,u_n)^2\leqslant\varepsilon^2$, 又例如: $D(z,\varepsilon;\,\mathrm{Re}\,g,\,\mathrm{Im}\,g)$ 为 $\{|\mathrm{Re}\,g|<\alpha\varepsilon,\ |\mathrm{Im}\,g|<\beta\varepsilon,\ \alpha>0,\ \beta>0\}$, 这可化为 $\{1-|u_n|^2<\alpha\varepsilon,\ 2|\mathrm{Im}\,u_n|<\beta\varepsilon,\ \alpha>0,\ \beta>0\}$ 等等. 在以下几节中, 将具体给出一些邻域 $D(z,\varepsilon)$, 对(6.2.8)进行计算, 可以将第一、二章中的结果推广到强拟凸域上去.

§6.3　$b\Omega$ 上的奇异积分

显然由(6.2.4)的左边所定义的 $Hu(z)$, $z\in b\Omega$, 为奇异

积分。

若 $w\in b\Omega$, $\varphi(w)\in \mathrm{Lip}\, p$, $0<p\leqslant 1$, z, $v\in b\Omega$, 在 Cauchy 主值意义下，令

$$\varphi_1(z)=\int_{b\Omega(a)} H(z, w)\varphi(w)d\sigma_w,$$

$$\varphi_2(v)=\int_{b\Omega(b)} H(v, w)\varphi_1(w)d\sigma_w,$$

这里 $\int_{b\Omega(a)}$ 表示 Cauchy 积分的主值，挖去的邻域为 $D_a(z, \varepsilon)$，而对应的(6.2.3)的值为 a。

作 Cauchy 型积分

$$f(\eta)=\int_{b\Omega} H(\eta, w)\varphi(w)d\sigma_w,$$

$$f_1(\eta)=\int_{b\Omega} H(\eta, w)\varphi_1(w)d\sigma_w,\ \eta\in\Omega.$$

η 从 Ω 内沿着非切线方向趋于 $b\Omega$ 上一点 ζ, 则由(6.2.4),

$$f(\zeta)=\int_{b\Omega(a)} H(\zeta, w)\varphi(w)d\sigma_w+a\varphi(\zeta),$$

$$f_1(\zeta)=\int_{b\Omega(b)} H(\zeta, w)\varphi_1(w)d\sigma_w+b\varphi_1(\zeta).$$

由 $\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta)$ 的定义知

$$\varphi_1(\zeta)=f(\zeta)-a\varphi(\zeta),\ \varphi_2(\zeta)=f_1(\zeta)-b\varphi_1(\zeta),\ \zeta\in b\Omega.$$

将 $\varphi_1(\zeta)$ 代入 $f_1(\eta)$ 的表达式中，

$$\begin{aligned} f_1(\eta)=&\int_{b\Omega(b)} H(\eta, w)f(w)\,d\sigma_w \\ &-a\int_{b\Omega(b)} H(\eta, w)\varphi(w)d\sigma_w \\ =&f(\eta)-af(\eta)=(1-a)f(\eta). \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} \varphi_2(\zeta)&=(1-a)f(\zeta)-b(f(\zeta)-a\varphi(\zeta)) \\ &=(1-a-b)f(\zeta)+ab\,\varphi(\zeta). \end{aligned}$$

对于 a, 如果存在 z 的邻域 $D_b(z, \varepsilon)$, 使得对应的(6.2.3)的值为

b, 且 $1-a-b=0$, 那末就得到

$$\varphi_2(\zeta)=ab\,\varphi(\zeta),$$

也就是
$$\mathbb{H}_b\mathbb{H}_a=ab\,I,$$

这里 I 表示恒等算子. 同样也可证明

$$\mathbb{H}_a\mathbb{H}_b=ab\,I.$$

于是可以得到推广的 Poincaré-Bertrand 公式:

定理 6.3.1 若 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 中光滑、有界、强拟凸域, $H(z, w)$ 为 H-R 核或 S-K 核, $\varphi\in C^\infty(b\Omega)$, 奇异积分算子 $\mathbb{H}_a$ 由(6.2.2)所定义. 如果对于 a, 存在另一种定义 Cauchy 主值的方法, 使(6.2.3)的值为 b, 且 $1-a-b=0$, 而其奇异积分算子为 $\mathbb{H}_b$, 那末

$$\mathbb{H}_a\mathbb{H}_b=\mathbb{H}_b\mathbb{H}_a=ab\,I, \tag{6.3.1}$$

这里 I 表示恒等算子, $ab\neq 0$.

(6.3.1) 还可以写成: 记 $\frac{1}{a}\mathbb{H}_a\varphi=\psi$, 则 $\frac{1}{b}\mathbb{H}_b\psi=\varphi$. 或记 $\frac{1}{b}\mathbb{H}_b\varphi=\psi$, 则 $\frac{1}{a}\mathbb{H}_a\psi=\varphi$.

由算子理论易知, 如果 λ 不是奇异积分算子 $\mathbb{H}_a$ 的特征根, $\mathbb{K}$ 为一连续算子, $f\in C^\infty(b\Omega)$, 则在 $b\Omega$上的奇异积分方程

$$(-\lambda I+\mathbb{H}_a+\mathbb{K})\varphi=f \tag{6.3.2}$$

有唯一解, 即可正规化为一个 Fredholm 积分方程. 当 $D(z, \varepsilon)$就是 $|g(z, w)|<\varepsilon$, Ω 为超球时, 这就是球面上的奇异积分方程理论(本书第二章的内容).

若 $w\in b\Omega$, $z\in b\Omega$, Ω 的 H-R 核或 S-K 核, $H(z, w)$ 为奇异核, 如同球面的情形一样, 由 $H(z, w)$ 可定义 B-核为

$$B(z, w)=H(z, w)+H(w, z)-1,$$

及 Hilbert 核

$$h(z, w)=\frac{1}{i}(H(z, w)-H(w, z)).$$

同样, 由这些奇异核出发, 除了奇异积分算子 $\mathbb{H}_a$ 以外, 还可得

$$\mathbb{B}_a\varphi=\int_{b\Omega(a)}\varphi(w)B(z,\ w)d\sigma_w$$

及

$$\mathbb{h}_a\varphi=\int_{b\Omega(a)}\varphi(w)h(z,\ w)d\sigma_w,$$

这里积分取 Cauchy 主值，挖去的邻域为 $D_a(z,\ \varepsilon)$，使得(6.2.3)的值为 a.

显然，如果 $\mathbb{H}_a$ 有逆算子，则 $\mathbb{B}_a$ 及 $\mathbb{h}_a$ 也有逆算子，于是也可以解在 $b\Omega$ 上的奇异积分方程

$$(-\mu I+\mathbb{B}_a+\mathbb{K})\varphi=f \tag{6.3.3}$$

及

$$(-\nu I+\mathbb{h}_a+\mathbb{K})\varphi=f, \tag{6.3.4}$$

这里 μ, ν 分别不是 $\mathbb{B}_a$ 及 $\mathbb{h}_a$ 的特征根，$\mathbb{K}$ 为一连续算子，$f\in C^\infty(b\Omega)$. 显然，如同第二章中所做的那样，可以解形如(6.3.2)，(6.3.3)，(6.3.4)的奇异积分方程组. 而当 $D(z,\ \varepsilon)$是 $|g(z,\ w)|<\varepsilon$, Ω 为超球时，这就是第二章中所讨论的奇异积分方程理论.

§6.4　当邻域是椭圆的情形

在这一节中，我们将一般的 Plemelj 公式，定理 6.2.1 具体化，即取邻域 $D(z,\ \varepsilon)$为"椭圆"：

$$D_e(z,\ \varepsilon)=\{w\in b\Omega,\ \alpha^2(\mathrm{Re}\,g)^2+\beta^2(\mathrm{Im}\,g)^2\leqslant\varepsilon^2\},$$

这里 $\alpha\geqslant0$, $\beta\geqslant0$, $\alpha+\beta\neq0$. 当 $\alpha=\beta$ 时，即为"圆"时，就是 Alt[1] 及 Kerzman-Stein[1]所讨论的情形. 在这情形下，要证明(6.2.3)成为

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\delta\to0}\int_{w\in D_e(z,\varepsilon)}H(z+\nu\delta,\ w)d\sigma_w=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}. \tag{6.4.1}$$

这时 Plemelj 公式(6.2.4)中的

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}.$$

于是特别当 $\beta=0$ 时，这时 $a=0$，Plemelj 公式成为十分简单的情形

$$\mathbb{H}u(z)=\mathbb{H}_0 u(z).$$

即当 z_0 从 Ω 内部，沿着非切线方向趋于 $z\in b\Omega$ 时，

$$\lim_{z_0\to z}\int_{w\in b\Omega} H(z,\ w)u(w)d\sigma_w$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{w\in b\Omega-D(z,\varepsilon)} H(z,\ w)u(w)d\sigma_w,$$

而 $D(z,\ \varepsilon)$ 为“带子” $\{w\in b\Omega,\ |\mathrm{Re}\, g|<\varepsilon\}$. 也就是，如同超球的情形一样，对于强拟凸域，可以找到一种定义 Cauchy 型积分的主值的方法，使得这个主值就是 Cauchy 型积分 $\mathbb{H}u(z_0)$ 当 z_0 从内部沿非切线方向趋于 $z\in b\Omega$ 时的极限值.

再看看什么时候奇异积分算子 $\mathbb{H}_a$ 有逆算子. 在 § 6.3 中已经谈及，如能找到算子 $\mathbb{H}_b$，而 $1-a-b=0$，$ab\neq 0$，则 $\frac{1}{b}\mathbb{H}_b$ 就是 $\frac{1}{a}\mathbb{H}_a$ 的逆算子，显然，如果

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}<1,$$

即

$$\frac{\alpha}{\beta}>2^{\frac{n-2}{n-1}}-1 \qquad (6.4.2)$$

时，取 $D_e(z,\ \varepsilon)=\{w\in b\Omega,\ \alpha'^2(\mathrm{Re}\, g)^2+\beta'^2(\mathrm{Im}\, g)^2\leqslant\varepsilon^2\}$，

这里 $\alpha'\geqslant 0$，$\beta'\geqslant 0$，$\alpha'+\beta'\neq 0$，而

$$\frac{\alpha'}{\beta'}=\left[2^{2-n}-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)^{1-n}\right]^{\frac{-1}{n-1}}-1.$$

若记

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta'}{\alpha'+\beta'}\right)^{n-1}=b,$$

则 $\frac{1}{b}\mathbb{H}_b$ 为 $\frac{1}{a}\mathbb{H}_a$ 的逆算子. 所以在限制(6.4.2)之下，$\mathbb{H}_a$ 是有逆

算子的．同样可以具体地讨论奇异积分方程理论．

现在来证明(6.4.1)．由§ 6.2 的讨论，只要证明(6.2.8)成立即可，即证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\in D(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho p_n\bar{u}')^n}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\in D(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_n)^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1},$$

这里 $p_n=(0,\cdots,0,1)$，$0<\rho<1$，而

$$D(p_n,\varepsilon)=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ \alpha^2(1-|u_n|^2)^2+4\beta^2(\operatorname{Im}u_n)^2\leqslant\varepsilon^2\}.$$

记 $\tilde{D}(p_n,\varepsilon)=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ \alpha^2(1-|u_n|^2)^2+4\beta^2(\operatorname{Im}u_n)^2>\varepsilon^2\}$，

由于 $$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\in D(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_n)^n}+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\in\tilde{D}(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_n)^n}$$

$$=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\bar{u}'=1}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_n)^n}=1,$$

因此只要证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\in\tilde{D}(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_n)^n}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\in\tilde{D}(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1},\tag{6.4.3}$$

而 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$\alpha+\beta\neq 0$．

当 $\alpha=0$，$\beta>0$ 时，(6.4.3)已在第一章中证明．

再考虑 $\alpha>0$，$\beta>0$ 的情形．

如同在第一章中所进行的那样，命 $\bar{u}_n=re^{i\theta}$，$v=(u_1,\cdots,u_{n-1})$．于是 $\tilde{D}(p_n,\varepsilon)$ 可以写为

$$\begin{cases}v\bar{v}'=1-r^2,\\ \alpha^2(1-r^2)^2+4\beta^2r^2\sin^2\theta>\varepsilon^2.\end{cases}$$

记 $$C=\sin^{-1}\frac{\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2(1-r^2)^2}}{2\beta r},$$

则

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\in\tilde{D}(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-u_n)^n}$$

$$=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\dot{v}\left\{\int_{-(\pi-c)}^{-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}+\int_{c}^{\pi-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}\right\}$$

$$+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'>\frac{\varepsilon}{\alpha}}\dot{v}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}=I_1+I_2. \qquad (6.4.4)$$

在第一章中已知

$$\int_{-\pi+c}^{-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}+\int_{c}^{\pi-c}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}$$

$$=2\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1+re^{-ic})^k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1-re^{ic})^k}\right.$$

$$\left.+\log\frac{1-re^{ic}}{1+re^{-ic}}\right\}+2(\pi-2c).$$

于是 $$I_1=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}J_k-\sum_{k=1}^{n-1}H_k+J_0-H_0\right\}$$

$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}(\pi-2c)\dot{v},$$

这里 $$J_0=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\log\frac{1}{1+re^{-ic}}\,\dot{v},\ J_k=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{\dot{v}}{k(1+re^{-ic})^k},$$

$$k=1,\ \cdots,\ n-1,$$

$$H_0=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\log\frac{1}{1-re^{ic}}\,\dot{v},\ H_k=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\frac{\dot{v}}{k(1-re^{ic})^k},$$

$$k=1,\ \cdots,\ n-1.$$

由于

$$\sin C=\frac{\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2(1-r^2)^2}}{2\beta r},\quad \cos C=\frac{\sqrt{4\beta^2r^2-\varepsilon^2+\alpha^2(1-r^2)^2}}{2\beta r},$$

可以有

$$1+re^{-ic}=1+\frac{\sqrt{4\beta^2(1-s^2)+\alpha^2s^4-\varepsilon^2}}{2\beta}-i\frac{\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2s^4}}{2\beta},$$

而 $s^2=1-r^2$. 命 $v=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{2n-2})$，用球坐标

$$x_1=s\cos\varphi_1,\ x_2=s\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\ \cdots,$$

$$x_{2n-2}=s\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-3},$$

则
$$\dot{v}=s^{2n-3}\sin^{2n-4}\varphi_1\sin^{2n-5}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{2n-4}\,ds\,d\varphi_1\cdots d\varphi_{2n-3},$$

于是
$$J_k=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}}\left\{1+\frac{\sqrt{4\beta^2(1-s^2)+\alpha^2s^4-s^2}}{2\beta}-i\frac{\sqrt{s^2-\alpha^2s^4}}{2\beta}\right\}^{-k}s^{2n-3}\,ds.$$

命 $\eta=\frac{\varepsilon}{\alpha}$, $s=\sqrt{\eta}\,t$, 则 J_k 等于

$$\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\eta^{n-1}\cdot\int_0^1\frac{t^{2n-3}\,dt}{[2\beta+\sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2)+\alpha^2\eta^2t^4-\alpha^2\eta^2}-i\sqrt{\alpha^2\eta^2(1-t^4)}]^k}.$$

由于被积函数绝对值有界，故

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_k=0,$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,$$

同样可证 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}J_0=0$。

与处理 J_k 的方法一样，H_k 可写成

$$H_k=\frac{2\pi^{n-1}(2\beta)^k}{k\Gamma(n-1)}\cdot\int_0^1\frac{\eta^{n-1}t^{2n-3}\,dt}{[2\beta-\sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2)+\alpha^2\eta^2t^4-\alpha^2\eta^2}-i\sqrt{\alpha^2\eta^2(1-t^4)}]^k}.$$

被积函数的绝对值，当 $k<n-1$ 时，不大于

$$M/(\beta^2t^4+\alpha^2(1-t^4)-1),$$

这里 M 为一绝对常数，而显然这在[0, 1]中为可积函数，故

$$\lim_{\varepsilon\to0}H_k=0,$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2.$$

而 H_{n-1} 为

$$\frac{2(2\beta\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

$$\cdot\int_0^1 \frac{\eta^{n-1}t^{2n-3}dt}{[2\beta-\sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2)+\alpha^2\eta^2(t^4-1)}-i\sqrt{\alpha^2\eta^2(1-t^4)}]^{n-1}}$$

$$=\frac{2(2\beta\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^1 \frac{t^{2n-3}dt}{[\beta t^2-i\alpha\sqrt{1-t^4}+O(\eta)]^{n-1}}.$$

若命 $\gamma=\frac{\alpha}{\beta}$, 则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H_{n-1}=\frac{2^n\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^1 \frac{t^{2n-3}dt}{(t^2-i\gamma\sqrt{1-t^4})^{n-1}}.$$

设 $t^2=\cos\theta$, 则

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H_{n-1}=\frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-2}\theta\sin\theta\, d\theta}{(\cos\theta-i\gamma\sin\theta)^{n-1}}$$

$$=\frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)}\frac{1}{(1+\gamma)^{n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2i\theta}+1)^{n-2}(e^{2i\theta}-1)}{i\left(1+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}e^{2i\theta}\right)^{n-1}}d\theta$$

$$=\frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)}\frac{1}{(1+\gamma)^{n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Bigg(\frac{1}{i}\sum_{\substack{p=0\\p+q\neq 0}}^{n-2}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q$$

$$\cdot C_q^{n-2}C_q^{n+q-2}\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^q(e^{2i\theta(p+q+1)}-e^{2i\theta(p+q)})$$

$$+\frac{1}{i}(e^{2i\theta}-1)d\theta$$

$$=-\frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)}\frac{1}{2(1+\gamma)^{n-1}}\sum_{\substack{p=0\\p+q\neq 0}}^{n-2}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q$$

$$\cdot C_p^{n-2}C_q^{n+q-2}\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^q$$

$$\cdot\left[\frac{(-1)^{p+q+1}-1}{p+q+1}-\frac{(-1)^{p+q}-1}{p+q}\right]$$

$$+\frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)(1+\gamma)^{n-1}}\left(1-\frac{\pi}{2i}\right).$$

因而 $\operatorname{Im}(\lim_{\varepsilon\to 0} H_{n-1})=\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im} H_{n-1}=\frac{\pi^n}{\Gamma(n)}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+\gamma}\right)^{n-1}.$

最后计算 H_0:

$$H_0=\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}\log\frac{1}{1-re^{ic}}\dot{v}$$

$$=-\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}}s^{2n-3}\log(1-re^{ic})\,ds,$$

而
$$\operatorname{Im}\log(1-re^{ic})=\arg(1-re^{ic})=O(1),$$

所以当 $n>1$ 时,

$$\operatorname{Im}H_0=O\left(\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}}s^{2n-3}\,ds\right)=O(\varepsilon^{n-1})=O(1).$$

同样可证：当 $n>1$ 时,

$$\int_{v\bar{v}'<\frac{\varepsilon}{\alpha}}(\pi-2C)\dot{v}=O(1).$$

综合上述结果，就有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+\gamma}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}.$$

再看 I_2，由于

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}=2\operatorname{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1+r)^k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1-r)^k}\right\}+2\pi,$$

所以
$$I_2=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\operatorname{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{\varepsilon}{\alpha}<v\bar{v}'<1}\frac{\dot{v}}{k(1+r)^k}+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{\varepsilon}{\alpha}<v\bar{v}'<1}\frac{\dot{v}}{k(1-r)^k}\right\}+\frac{2\pi}{\omega_{2n-1}}\int_{\frac{\varepsilon}{\alpha}<v\bar{v}'<1}\dot{v}$$

显然
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\int_{\frac{\varepsilon}{\alpha}<v\bar{v}'<1}\frac{\dot{v}}{(1+r)^k}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\int_0^1\frac{s^{2n-3}\,ds}{(1+\sqrt{1-s^2})^k}\right)=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\int_{\frac{\varepsilon}{\alpha}<v\bar{v}'<1}\frac{\dot{v}}{(1-r)^k}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\int_0^1\frac{s^{2n-3}\,ds}{(1-\sqrt{1-s^2})^k}\right)=0,$$

故得
$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_2=\frac{2\pi}{\omega_{2n-1}}\int_{0<v\bar{v}'<1}\dot{v}=1.$$

对(6.4.4)式两边取极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$，并将上述结果代入，即得(6.4.3)。

最后考虑 $\alpha>0$, $\beta=0$ 的情形。

这时(6.4.3)成为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\tilde{D}(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}=1,$$

而 $$\tilde{D}(p_n,\ \varepsilon)=\left\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ 1-|u_n|^2>\frac{\varepsilon}{\alpha}\right\}.$$

仍用前面的变换，$\tilde{D}(p_n,\ \varepsilon)$即为

$$\begin{cases} v\bar{v}'=1-r^2,\\ 1-r^2>\dfrac{\varepsilon}{\alpha}. \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\tilde{D}(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{1>v\bar{v}'>\frac{\varepsilon}{\alpha}}\dot{v}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n}.$$

这就是前面讨论过的积分 I_2。但已知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_2=1.$$

故得(6.4.3)当 $\alpha>0$, $\beta=0$ 时也成立。

§6.5 当邻域是矩形的情形

现在取 z 的邻域 $D_R(z,\ \varepsilon)$为“矩形”：

$$D_R(z,\ \varepsilon)=\{w\in b\Omega,\ |\mathrm{Re}\,g|<\alpha\varepsilon,\ |\mathrm{Im}\,g|<\beta\varepsilon\},$$

这里 $\alpha>0$, $\beta>0$. 在这种情形下，将要证明(6.2.3)成为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{w\in D_R(z,\varepsilon)}H(z+\nu\delta,\ w)d\sigma_w$$
$$=\frac{2^{n-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-h_n\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\},\tag{6.5.1}$$

其中 $$h_n(x)=\int_0^x\cos^{n-2}t\,\frac{\sin(n-1)t}{\sin t}\,dt,$$

这时 Plemelj 公式(6.2.4)中的

$$a=\frac{2^{n-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}, \tag{6.5.2}$$

特别当 $\alpha=\beta$ 时，即矩形为正方形时，

$$a=\frac{2^{n-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-h_n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

当 $\alpha=\infty$ 时，$D_R(z, \varepsilon)$成为

$$\{w\in b\,\Omega,\ |\operatorname{Im} g|<\beta\,\varepsilon\},$$

这就是上节讨论的情形，由于 $h_n(0)=0$，所以 $a=2^{n-2}$，与上节的结果相一致.

当 $\beta=\infty$ 时，$D_R(z, \varepsilon)$成为

$$\{w\in b\,\Omega,\ |\operatorname{Re} g|<\alpha\,\varepsilon\},$$

这也是上节讨论的情形．在以下的证明中可以看出

$$h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right)=\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\alpha^k}{k(\alpha^2+\beta^2)^{k/2}}\sin\left(k\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

所以当 $\beta\to\infty$ 时，$\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\pi}{2}$，而 $h_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，故 $a=0$．这也与上节的结果相一致.

如同上一节一样，对于奇异积分算子 $\mathbb{H}_a$，如能找到算子 $\mathbb{H}_b$，而 $1-a-b=0$，则 $\frac{1}{b}\mathbb{H}_b$ 就是 $\frac{1}{a}\mathbb{H}_a$ 的逆算子．对于一个固定的 n，如果 α, β 满足

$$h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right)>\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2^{n-1}}, \tag{6.5.3}$$

那末 $\mathbb{H}_a$(a 由(6.5.2)所定义)是有逆算子的．也就是，我们只要选取 $D_R(z, \varepsilon)$为

$$\{z\in b\,\Omega,\ |\operatorname{Re} g|<\alpha'\,\varepsilon,\ |\operatorname{Im} g|<\beta'\,\varepsilon\},$$

这里 $\alpha'>0$, $\beta'>0$, 使得

$$h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta'}{\alpha'}\right)=\pi\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

记 $b=\frac{2^{n-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\right\}$，则 $\frac{1}{b}\mathbb{H}_b$ 即为 $\frac{1}{a}\mathbb{H}_a$ 的逆算子。所以在限制(6.5.3)之下，$\mathbb{H}_a$ 是有逆算子的。同样可以具体讨论奇异积分方程理论。

现在来证(6.5.1)。由§6.2的讨论，只要证明(6.2.8)成立，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{u\in D_R(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_n)^n}$$
$$=\frac{2^{n-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\},$$

而 $p_n=(0,\cdots,0,1)$，$\alpha>0$，$\beta>0$，及

$$D_R(p_n,\varepsilon)=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ 1-|u_n|^2<\alpha\varepsilon,\ 2|\operatorname{Im}u_n|<\beta\varepsilon\}.$$

记

$$\tilde{D}_R(p_n,\varepsilon)=\{u\bar{u}'=1\}-D_R(p_n,\varepsilon),$$
$$M_\varepsilon=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ 1-|u_n|^2>\alpha\varepsilon\},$$
$$N_\varepsilon=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ 2|\operatorname{Im}u_n|>\beta\varepsilon\},$$
$$Q_\varepsilon=\{u\,|\,u\bar{u}'=1,\ 1-|u_n|^2>\alpha\varepsilon,\ 2|\operatorname{Im}u_n|>\beta\varepsilon\}.$$

于是要证的等价于

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\tilde{D}_R(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}$$
$$=1-\frac{2^{n-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}.\tag{6.5.4}$$

但是

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\tilde{D}_R(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}$$
$$=\left(\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{M_\varepsilon}+\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{N_\varepsilon}-\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{Q_\varepsilon}\right)\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n},\tag{6.5.5}$$

由上一节已知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{M_\varepsilon}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}=1,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{N_\varepsilon}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}=1-2^{n-2},\tag{6.5.6}$$

所以只要计算

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{Q_\varepsilon}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}$$

即可.

如同上一节中所进行的那样, 记

$$\bar{u}_n=re^{i\theta},\ v=(u_1,\ \cdots,\ u_{n-1}),$$

则 Q_ε 可以写为

$$\begin{cases} v\bar{v}'=1-r^2, \\ 1-r^2>\alpha\varepsilon,\ 2r|\sin\theta|>\beta\varepsilon. \end{cases}$$

于是 $\displaystyle\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{Q_\varepsilon}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}$

$$=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\alpha\varepsilon<v\bar{v}'<1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}\dot{v}\left\{\int_{-\pi+c}^{-c}+\int_c^{\pi-c}\right\}\frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n},$$

这里 $c=\sin^{-1}\dfrac{\beta\varepsilon}{2r}$.

如同上一节那样, 按第一章中的做法, 这还可写为

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{Q_\varepsilon}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}$$

$$=\frac{2}{\omega_{2n-1}}\operatorname{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}J_k-\sum_{k=1}^{n-1}H_k+J_0-H_0\right\}$$

$$+\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{\alpha\varepsilon<v\bar{v}'<1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}(\pi-2c)\dot{v},$$

其中 $\displaystyle J_0=\int_{\alpha\varepsilon<v\bar{v}'<1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}\log\frac{1}{1+re^{-ic}}\dot{v},$

$$H_0=\int_{\alpha\varepsilon<v\bar{v}'<1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}\log\frac{1}{1-re^{ic}}\dot{v},$$

$$J_k=\int_{\alpha\varepsilon<v\bar{v}'<1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}\frac{\dot{v}}{k(1+re^{-ic})^k},$$

$$H_k=\int_{\alpha\varepsilon<v\bar{v}'<1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}\frac{\dot{v}}{k(1-re^{ic})^k},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

采用球坐标,

$$\int_{\alpha\varepsilon<v\bar{v}'<1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2} c\dot{v}=\int_{\alpha\varepsilon<v\bar{v}'<1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}\sin^{-1}\frac{\beta\varepsilon}{2\sqrt{1-v\bar{v}'}}\dot{v}$$

$$=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\int_{\sqrt{\alpha\varepsilon}}^{\sqrt{1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}} s^{2n-3}\sin^{-1}\frac{\beta\varepsilon}{2\sqrt{1-s^2}}ds$$

$$=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\left[\int_0^1\left(1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{n-1}\right.$$

$$\cdot\sin^{-1}\frac{\beta\varepsilon}{2\sqrt{1-\left(1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2\right)t^2}}dt$$

$$\left.-\int_0^1(\alpha\varepsilon)^{n-1}\sin^{-1}\frac{\beta\varepsilon}{2\sqrt{1-\alpha\varepsilon t^2}}dt\right].$$

由于被积函数有界，故

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\alpha\varepsilon<v\bar{v}'<1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2} c\dot{v}=0.$$

从而有
$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{2}{\omega_{2n-1}}\int_{\alpha\varepsilon<v\bar{v}'<1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}(\pi-2c)\dot{v}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{2\pi}{\omega_{2n-1}}\int_{\alpha\varepsilon<v\bar{v}'<1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}\dot{v}=1.$$

由于
$$1+re^{-i\theta}=1+\frac{\sqrt{4r^2-\beta^2\varepsilon^2}}{2}-i\frac{\beta\varepsilon}{2},$$

所以

$$J_k=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\int_{\sqrt{\alpha\varepsilon}}^{\sqrt{1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}}\frac{s^{2n-3}ds}{\left(1+\frac{\sqrt{4(1-s^2)-\beta^2\varepsilon^2}}{2}-i\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^k}$$

$$=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\left\{\int_0^1\frac{\left[1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2\right]^{n-1}t^{2n-3}dt}{\left[1+\frac{\sqrt{4\left(1-\left(1-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4}\right)t^2\right)-\beta^2\varepsilon^2}}{2}-i\frac{\beta\varepsilon}{2}\right]^k}\right.$$

$$\left.-\int_0^1\frac{(\alpha\varepsilon)^{n-1}t^{2n-3}dt}{\left[1+\frac{\sqrt{4(1-\alpha\varepsilon t^2)-\beta^2\varepsilon^2}}{2}-i\frac{\beta\varepsilon}{2}\right]^k}\right\}.$$

这两个被积函数都是有界的，故有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_k=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\int_0^1\frac{t^{2n-3}\,dt}{(1+\sqrt{1-t^2})^k}.$$

所以　$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im} J_k=0,\qquad k=1,\ \cdots,\ n-1.$$

同法可证　$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im} J_0=0,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im} H_0=0.$$

与计算 J_k 一样，H_k 可写为

$$\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}\left\{\int_0^1\frac{\left(1-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4}\right)^{n-1}t^{2n-3}\,dt}{\left[1-\sqrt{1-\left(1-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4}\right)t^2-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4}}-i\frac{\beta\varepsilon}{2}\right]^k}\right.$$

$$\left.-\int_0^1\frac{(\alpha\varepsilon)^{n-1}t^{2n-3}\,dt}{\left[1-\sqrt{1-\alpha\varepsilon t^2-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4}}-i\frac{\beta\varepsilon}{2}\right]^k}\right\}$$

$$=\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)}(X_k-Y_k).$$

第一个积分的被积函数的绝对值不超过 $\frac{t^{2n-3}}{(1-\sqrt{1-t^2})^k}$，而当 $k<n-1$ 时，此函数在 $[0,\ 1]$ 上积分收敛，所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0} X_k=\int_0^1\frac{t^{2n-3}\,dt}{(1-\sqrt{1-t^2})^k}.$$

第二个积分的被积函数的绝对值为 $O(\varepsilon^{n-k-1})$，所以当 $k<n-1$ 时，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} Y_k=0$。因之，当 $k<n-1$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im} H_k=0.$$

最后计算 H_{n-1}。这时 $H_{n-1}=\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}(X_{n-1}-Y_{n-1})$，而

$$X_{n-1}=\left(1-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4}\right)^{n-1}\int_0^1\frac{t^{2n-3}\,dt}{\left[1-\sqrt{\left(1-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4}\right)(1-t^2)}-i\frac{\beta\varepsilon}{2}\right]^{n-1}},$$

$$Y_{n-1}=(\alpha\varepsilon)^{n-1}\int_0^1\frac{t^{2n-3}\,dt}{\left[1-\sqrt{1-\alpha\varepsilon t^2-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4}}-i\frac{\beta\varepsilon}{2}\right]^{n-1}}.$$

记 $1-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4}=\eta^2$，则

$$X_{n-1}=\eta^{2n-2}\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{[1-\eta\sqrt{1-t^2}-i\sqrt{1-\eta^2}]^{n-1}}.$$

由第一章已知

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{Im}\,X_{n-1}=2^{n-3}\pi.$$

由于 $1-\sqrt{1-\alpha\varepsilon t^2-\frac{\beta^2\varepsilon^2}{4}}-i\frac{\beta\varepsilon}{2}=\frac{1}{2}\alpha t^2-\frac{i}{2}\beta+O(\varepsilon)$，

所以，若记 $\gamma=\beta/\alpha$，则

$$\lim_{\varepsilon\to0}Y_{n-1}=2^{n-1}\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{\left(\frac{1}{2}\alpha t^2-\frac{i}{2}\beta\right)^{n-1}}$$

$$=2^{n-1}\int_0^1\frac{t^{2n-3}dt}{(t^2-i\gamma)^{n-1}}=2^{n-2}\int_0^1\frac{x^{n-2}dx}{(x-i\gamma)^{n-1}}$$

$$=2^{n-2}\left(\log\frac{1-i\gamma}{-i\gamma}-D_n+\sum_{k=1}^{n-2}C_k^{n-2}\frac{(-1)^k}{k}\right).$$

这里 $D_n=\sum_{k=1}^{n-2}C_k^{n-2}\frac{1}{k}\left(\frac{i\gamma}{1-i\gamma}\right)^k$，$(n\geqslant3)$。于是有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{Im}\,Y_{n-1}=2^{n-1}\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\gamma}-\mathrm{Im}\,D_n\right],\ n\geqslant3. \tag{6.5.7}$$

当 $n=2$ 时，

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{Im}\,Y_1=2\,\mathrm{Im}\left(\int_0^1\frac{t}{t^2-i\gamma}dt\right)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\gamma}.$$

所以如果规定 $D_2=0$，则(6.5.7)当 $n\geqslant2$ 时也成立．于是有，当 $n\geqslant2$ 时，

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{Im}\,H_{n-1}=\frac{2^{n-2}\pi^n}{\Gamma(n)}\left\{1-\frac{2}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\gamma}+\frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\,D_n\right\}.$$

因之

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{Q_\varepsilon}\frac{\dot{u}}{(1-u_n)^n}$$

$$=1-2^{n-2}\left(1-\frac{2}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\gamma}+\frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\,D_n\right). \tag{6.5.8}$$

由(6.5.5), (6.5.6), (6.5.8)得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\tilde{D}_n(p_n,\varepsilon)}\frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}=1-\frac{2^{n-1}}{\pi}\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\gamma}-\operatorname{Im}D_n\right).$$

记 $\zeta=\dfrac{i\gamma}{1-i\gamma}$, 则

$$D_2=0,\ D_n=\sum_{k=1}^{n-2}C_k^{n-2}\frac{\zeta^k}{k}\ (n\geqslant 3),$$

而 $D_{k+1}-D_k=\dfrac{(\zeta+1)^{k-1}-1}{k-1}$, 所以

$$D_n=\sum_{k=2}^{n-1}(D_{k+1}-D_k)=\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(\zeta+1)^{k-1}}{k-1}-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k-1}.$$

由于

$$\operatorname{Im}(\zeta+1)^k=\frac{1}{(1+\gamma^2)^{k/2}}\sin(k\operatorname{tg}^{-1}\gamma)$$

$$=\frac{\alpha^k}{(\alpha^2+\beta^2)^{k/2}}\sin\left(k\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

所以

$$\operatorname{Im}D_n=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}\operatorname{Im}(\zeta+1)^k$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\alpha^k}{k(\alpha^2+\beta^2)^{k/2}}\sin\left(k\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right).\qquad(6.5.9)$$

记 $\eta=\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}$, 则有

$$\operatorname{Im}D_n=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}\cos^k\eta\sin k\eta.$$

显然有

$$\frac{d}{d\eta}\operatorname{Im}D_n=\sum_{k=1}^{n-2}\cos^{k-1}\eta\cos(k+1)\eta$$

$$=\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n-2}\cos^{k-1}\eta e^{i(k+1)\eta}=-1+\cos^{n-2}\eta\frac{\sin(n-1)\eta}{\sin\eta}.$$

于是得到 $$\operatorname{Im}D_n=-\eta+\int_0^\eta\cos^{n-2}\eta\frac{\sin(n-1)\eta}{\sin\eta}d\eta,$$

这就证明了(6.5.1).

§6.6 关于 Bochner-Martinelli 型积分

设 $m=2n(n\geqslant 2)$, $z_\alpha=u_\alpha+iu_{n+\alpha}(\alpha=1, \cdots, n)$, $\mathscr{D}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中一域, $b\mathscr{D}\in C^2$, $b\mathscr{D}$ 由下式定义:

$$F(u_1, \cdots, u_{2n})=0.$$

如 (0.3.5) 所介绍的, Bochner-Martinelli 核是一种 Cauchy-Fantappiè 核, 它定义为

$$K_{(2n-1)}(z, \zeta)=\sigma\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\frac{1}{[r(z-\zeta)]^{2n-2}}$$

$$dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n\wedge\overline{dz_1}\wedge\cdots\wedge[\overline{dz_\alpha}]\wedge\cdots\wedge[dz_n],$$

这里 $z=(z_1, \cdots, z_n)$, $\zeta=(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$, $r(z-\zeta)$ 为 z 与 ζ 的欧氏距离, $\sigma=(n-2)!/(2\pi i)^n$, $[\overline{dz_\alpha}]$表示缺掉 $\overline{dz_\alpha}$ 这一项.

若 $f(z)$在 $\mathscr{D}$ 解析, 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 连续, 则有Cauchy 公式

$$f(w)=\int_{b\mathscr{D}}f(z)K_{(2n-1)}(z, w), \quad z\in\mathscr{D}.$$

Bochner-Martinelli 核尽管有此再生性质, 但由于此核不再是 w 的解析函数, 所以由此核所定义的 Cauchy 型积分(或称 Bochner-Martinelli 型积分)不再是解析函数了.

若 $b\mathscr{D}$ 为可定向的、光滑的、属于C^2 的流形, $f(z)$ 为在 $b\mathscr{D}$ 上定义的连续复值函数, 且满足 Lipschitz 条件. 于是关于 Cauchy 型积分

$$F(w)=\int_{b\mathscr{D}}f(z)K_{(2n-1)}(z, w),$$

陆启铿与钟同德[1]证明了如下的 Plemelj 公式:

当 w 从 $\mathscr{D}$ 域内部沿着非切线方向趋于点 $w_0\in b\mathscr{D}$ 时, 有

$$F_i(w_0)=\text{v. p.}\int_{b\mathscr{D}}f(z)K_{(2n-1)}(z, w_0)+\frac{1}{2}f(w_0),$$

当 w 从 $\mathscr{D}$ 域外部沿着非切线方向趋于点 $w_0\in b\mathscr{D}$ 时, 有

$$F_e(w_0) = \text{v. p.} \int_{b\mathscr{D}} f(z) K_{(2n-1)}(z, w_0) - \frac{1}{2} f(w_0).$$

这里 v. p. $\int_{b\mathscr{D}}$ 的定义为 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\mathscr{D}-b\mathscr{D}\cap S_\varepsilon(w_0)}$，而 $S_\varepsilon(w_0)$ 为

$$(u-w_0)(\overline{u-w_0})' < \varepsilon^2, \quad u=(u_1, \cdots, u_n).$$

我们同样可以提出这样的问题，对于 Bochner-Martinelli 型积分，是否可以有多种的 Cauchy 主值的定义方法，而 $\frac{1}{2}$ 的值也将由各种不同的定义方法得到的相应的不同值所替代？

答案是否定的.

其理由是：在上述定理的证明过程中，在 w_0 的附近挖去的邻域为 $b\mathscr{D}\cap S_\varepsilon(w_0)$，如果挖去的不是 $b\mathscr{D}\cap S_\varepsilon(w_0)$，而是另一个邻域 $b\mathscr{D}\cap M_\delta(w_0)$，那末我们可以取 δ 充分小，使得

$$b\mathscr{D}\cap M_\delta(w_0)\subset b\mathscr{D}\cap S_\varepsilon(w_0).$$

由于 Bochner-Martinelli 核在整个空间（除去 $w=w_0$ 一点外）都有定义，且同调于零，故由 Stokes 公式，在 $b\mathscr{D}\cap S_\varepsilon(w_0)$ 上的积分与在 $b\mathscr{D}\cap M_\delta(w_0)$ 上的积分是相等的. 也就是说，不论怎样取 w_0 的邻域来定义 Cauchy 型积分，都得到的是相同的结果，这与一个复变数时的 Cauchy 核 $\frac{1}{z-\zeta}$ 的情形是完全一样的.

关于 Bochner-Martinelli 型积分，钟同德以及其他一些同志还做过很多研究，有兴趣的读者可以参阅他们的工作.

参 考 文 献

史济怀

[1] 关于超球的 Cauchy 型积分，中国科技大学学报 10(1980)，1～9.

华罗庚

[1] 多复变数函数论中的典型域的调和分析，1958，科学出版社.

华罗庚、陆启铿

[1] Theory of Harmonic Functions in Classical Domains, Scientia Sinica 8 (1959) 1031～1094.

吴新谋等

[1] 数学物理方程第三册，1959，科学出版社.

孙继广

[1] 复超球面上奇异积分方程的正则化，1979，厦门大学数学系.

陆启铿、钟同德

[1] Привалов 定理的拓广，数学学报 7(1957)，144～165.

龚 昇

[1] 多复变数典型域的 Cauchy 型积分(I)，中国科学技术大学建校五周年纪念论文集(1963)，23～25.

[2] A remark on integral of Cauchy type in several complex variables, Proceeding of 1st symposium of differential eguations and differential geometry, 1980.

[3] 酉群上的富理埃分析 III，数学学报 13(1963)，152～161.

龚 昇、孙继广

[1] 圆型域中的解析函数的积分表示，中国科学技术大学学报 1(1965)，219～226.

[2] 多复变数的 Cauchy 型积分 (I)，超球的 Cauchy 型积分，数学学报 15 (1965)，431～443.

[3] 多复变数的 Cauchy 型积分 (II)，Lie 球双曲空间的 Cauchy 型积分，数学学报 15(1965)，775～799.

[4] 多复变数的 Cauchy 型积分 (III)，矩阵双曲空间的 Cauchy 型积分，数学学报 15(1965)，800～811.

[5] 复超球面上的奇异积分方程，数学学报 16(1966)，194～210.

龚 昇、史济怀

[1] 关于多复变数可递域的 Poisson 公式的一点注记，中国科学技术大学学报 2(1966)，16～20.

[2] Singular integrals in several complex variables I, On integral of

Henkin type, Chinese Annals of Mathematics, 1982.

[3] 多复变数的奇异积分 II, Hadlamard 主值, 数学年刊(将发表).

[4] 多复变数的奇异积分 III, 典型域的 Cauchy 型积分, 数学年刊(将发表).

[5] 多复变数的奇异积分 IV, 超球面上的 Cauchy 型积分的导数, 数学年刊(将发表).

Alt, W.

[1] Singuläre Integrale mit gemischten Hologemitäten auf Mannigfaltigkeiten und Anwendungen in der Funktionentheorie, Math. Z. 137(1974), 227～256.

Bergman, S.

[1] Kernel function and extended classes in the theory of functions of complex variables, Colloque aux les Functions de plusieurs variables, Bruxelles 1953.

Bochner, S.

[1] Classes of holomorphic functions of several variables in circular domains, Pro. Nat. Acad. Sci. 46(1960), 720～723.

Boutet de Monvel and Sjöstrand J.

[1] Sur la singularité eles noyaux de Bergman et de Szegö, Soc. Mat. de France, Asteris gue 34～35(1976), 123～164.

Fefferman, C.

[1] The Bergman kernel and biholomorphic mappings of strictly pseudo convex domains, Inventions Mat. 26(1974), 1～66.

Folland G. and Stein E. M.

[1] Estimates for the ∂_b complex and analysis on Heisenberg group, Comm. Pure Appl. Math. Vol. XXVII(1974), 429～522.

Fox, C.

[1] A generalization of the Cauchy principal value, Canadian J. Math. 9 (1957), 110～117.

Hadamard, J.

[1] Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, 1956.

Kerzman, N.

[1] Singular integrals in complex analysis, Proceeding of symposia in pure Mathematics, XXXV(1979), 3～41.

Kerzman N. and Stein E. M.

[1] The Szegö kernel in terms of Cauchy-Fantappié kernels, Duke Math. J. 45(1978), 197～224.

Koppelman, W.

[1] The Cauchy integral for functions of several complex variables, Bull.

Amer. Math. Soc. 73(1967), 373~377.

Korányi, A.

[1] Harmonic functions on Hermitian hyperbolic Space, Tram. Amer. Math. Soc. 135(1969), 507~516.

Koranyi, A. and Vagi S.

[1] Singular integrals in homogenous spaces and some problems of classical analysis, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 25(1971), 575~648.

Norguet, F.

[1] Introduction aux functions de plusieurs variables complexes: représentations intigrales, Univ. Paris VII U. E. R. de Math. (1970~1971).

Peters, A. S.

[1] The solutions of certain integral equations with kernels $K(z,\zeta)/(z-\zeta)$, Comm. pure and Appl. Math. 18(1965), 129~146.

Ramirez de Arellaus, E.

[1] Ein Divisions problem und Randintegralclarstellungen in der komplexen analysis, Math. Ann. 184(1970) 172~187.

Rudin, W.

[1] Function theory in unit ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980.

Векуа, Н. П.

[1] Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, ГТГИ(1950).

Гахов, Ф. Д.

[1] Краевые задачи, Физматгиз(1962).

Каничев, В. А.

[1] Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменых, Уч. зап. Шахтинск, педин-те, 2:6(1959), 29~90.

Михлин, С. Г.

[1] Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнение, 1962.

Мусхелишвили, Н. И.

[1] Сингулярные интегральные уравнения, Москва 1962.

Хенкин, Г. М.

[1] Интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях и некоторые приложения, Матем. Сб., 78 (1969) 4, 611~632.

SERIES OF MODERN MATHEMATICS

Classical Manifold and Classical Domain
By Liu Qi-keng

Differential Geometry of Homogeneous Space
By Gu Chao-Hao

Measure and Integration Theory on Infinite-dimensional Spaces; Abstract Harmonic Analysis
By Xia Dao-xing

Theory of Limit Cycle
By Ye Yan-qian

Computational Geometry
By Su Bu-qing, Liu Ding-yuan

Singular Integral in Several Complex Variables
By Gong Sheng